

Limite d'une fonction

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 9h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : généralités sur les fonctions (chapitre 3), trigonométrie (chapitre 7), ordre dans $\mathbb{R}$.

Capacités attendues : calculer les limites des fonctions polynômes, rationnelles et irrationnelles ; calculer les limites des fonctions trigonométriques simples à l'aide des limites usuelles ; résoudre des inéquations de type $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ pour prouver $\lim f = \ell$ dans des cas simples.

Table des matières

1	Notion intuitive de limite	2
1.1	Approche graphique	2
1.2	Exemples graphiques	2
2	Limite en un point	3
2.1	Définition formelle (informelle pour le programme)	3
2.2	Limite à gauche, limite à droite	3
2.3	Continuité	3
3	Limite en l'infini	4
4	Opérations sur les limites	5
4.1	Théorème de la somme, du produit et du quotient	5
4.2	Limites avec l'infini	5
4.3	Quatre formes indéterminées	5
5	Calcul de limites usuelles	6
5.1	Polynômes à l'infini	6
5.2	Fonctions rationnelles à l'infini	6
5.3	Forme $\frac{0}{0}$: factorisation	6
5.4	Forme $\frac{0}{0}$ ou $\infty - \infty$ avec racines : quantité conjuguée	6
5.5	Limites trigonométriques fondamentales	7
6	Comparaison et encadrement	8
6.1	Théorème de la comparaison	8
6.2	Théorème des gendarmes (sandwich)	8
7	Synthèse	9
7.1	Méthodologie de calcul de limite	9
7.2	Récapitulatif des limites usuelles	9
7.3	Pièges classiques	9

1. Notion intuitive de limite

1.1 Approche graphique

Définition

Définition 1.1 — (Approche intuitive) Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$ (ou $a = \pm\infty$). On dit que f **tend vers** ℓ (réel ou $\pm\infty$) **quand** x **tend vers** a , et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell,$$

si les valeurs $f(x)$ se rapprochent d'aussi près qu'on veut de ℓ lorsque x se rapproche suffisamment de a .

1.2 Exemples graphiques

Exemple

Exemple 1.1 —

- $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ (limite d'une fonction continue : on substitue).
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$.

2. Limite en un point

2.1 Définition formelle (informelle pour le programme)

Définition

Définition 2.1 — Soit f définie sur un voisinage de a (sauf éventuellement en a).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x) (0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

2.2 Limite à gauche, limite à droite

Définition

Définition 2.2 —

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x) (0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x) (0 < a - x < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

f admet une limite en a ssi $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$; cette valeur commune est alors la limite.

2.3 Continuité

Propriété

Propriété 2.1 — Si f est définie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, on dit que f est **continue** en a . Les fonctions polynômes, rationnelles, racines (sur leur domaine), sin, cos, tan sont continues sur leur domaine.

Pour ces fonctions : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (on « substitue »).

3. Limite en l'infini

Définition

Définition 3.1 —

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists A \in \mathbb{R})(\forall x > A) |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall B > 0)(\exists A \in \mathbb{R})(\forall x > A) f(x) > B.$$

Propriété

Propriété 3.1 — (Limites usuelles à l'infini)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

4. Opérations sur les limites

4.1 Théorème de la somme, du produit et du quotient

Théorème

Théorème 4.1 — Soient f, g deux fonctions et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell_2$ (avec ℓ_1, ℓ_2 finis), alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \ell_2.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \quad (\text{si } \ell_2 \neq 0).$$

4.2 Limites avec l'infini

Propriété

Propriété 4.1 — (Règles avec ∞) On résume les règles usuelles :

Somme	Cas
$\ell + \infty = +\infty$ $\ell + (-\infty) = -\infty$	si ℓ fini
$+\infty + (+\infty) = +\infty$	
$-\infty + (-\infty) = -\infty$	
$+\infty + (-\infty)$	forme indéterminée
Produit	
$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ selon signes	
$\ell \cdot \infty = \pm\infty$ selon signes (si $\ell \neq 0$)	
$0 \cdot \infty$	forme indéterminée
Quotient	
$\frac{\ell}{\pm\infty} = 0$ (si ℓ fini)	
$\frac{\pm\infty}{\ell} = \pm\infty$ selon signes (si $\ell \neq 0$)	
$\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$	formes indéterminées

4.3 Quatre formes indéterminées

Remarque

Les **formes indéterminées** (notation FI) sont :

$$\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Dans ces cas, on ne peut pas conclure directement. Il faut *transformer* l'expression pour lever l'indétermination.

5. Calcul de limites usuelles

5.1 Polynômes à l'infini

Théorème

Théorème 5.1 — La limite à $\pm\infty$ d'un polynôme est celle de son **terme de plus haut degré**.
Pour $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ avec $a_n \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n.$$

Exemple

Exemple 5.1 — $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 5x + 7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x^2 - 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty.$$

5.2 Fonctions rationnelles à l'infini

Théorème

Théorème 5.2 — La limite à $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle est celle du **rapport des termes de plus haut degré**.

Exemple

Exemple 5.2 — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

5.3 Forme $\frac{0}{0}$: factorisation

Méthode

Pour lever une FI $\frac{0}{0}$ dans un quotient $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en $x = a$: si $P(a) = Q(a) = 0$, factoriser $(x - a)$ au numérateur et au dénominateur, puis simplifier.

Exemple

Exemple 5.3 — $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$.

5.4 Forme $\frac{0}{0}$ ou $\infty - \infty$ avec racines : quantité conjuguée

Méthode

Pour les fonctions avec racines, multiplier par la *quantité conjuguée* pour faire disparaître la racine :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad (\text{si } a, b \geq 0 \text{ et } \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0).$$

Exemple

Exemple 5.4 — $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}.$

5.5 Limites trigonométriques fondamentales

Théorème

Théorème 5.3 — (Limites trigonométriques usuelles)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

Exemple

Exemple 5.5 — $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)/(5x) \cdot 5x}{\sin(2x)/(2x) \cdot 2x} = \frac{5}{2}.$

6. Comparaison et encadrement

6.1 Théorème de la comparaison

Théorème

Théorème 6.1 — Soit f et g telles que $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a .

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

6.2 Théorème des gendarmes (sandwich)

Théorème

Théorème 6.2 — (**Théorème d'encadrement**) Soient f, g, h telles que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de a .

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ (fini), alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Exemple

Exemple 6.1 — Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Solution. Pour $x \neq 0$, $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$. Donc $-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0$, par les gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Exemple

Exemple 6.2 — Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Solution. $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ pour $x > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$, par les gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

7. Synthèse

7.1 Méthodologie de calcul de limite

1. **Substitution directe** si la fonction est continue en a .
2. Si on obtient une **forme indéterminée**, identifier laquelle :
 - $\infty - \infty$: mettre en facteur le terme dominant.
 - $\frac{0}{0}$: factoriser, simplifier ; ou conjuguer si racines.
 - $\frac{\infty}{\infty}$: termes de plus haut degré pour rationnelles, conjuguer pour racines.
 - $0 \times \infty$: transformer en quotient.
3. Utiliser les **limites usuelles** ($\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, etc.).
4. Si nécessaire, appliquer **comparaison** ou **gendarmes**.

7.2 Récapitulatif des limites usuelles

Expression	Limite
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	1
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$	1
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$	$\frac{1}{2}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} \ (a \neq 0)$	a
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n}$	0
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \ (n > 0)$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$	$-\infty$

7.3 Pièges classiques

Remarque

1. **Substituer dans une FI.** Penser que $\frac{0}{0} = 1$ ou $\infty - \infty = 0$. *Faux !*
2. **Mauvais signe avec $-\infty$.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, pas $+\infty$.
3. **Limites usuelles : conditions.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *uniquement* en $x \rightarrow 0$; en $x \rightarrow +\infty$, la limite est 0 (pas 1).
4. **Quantité conjuguée mal posée.** Multiplier numérateur *et* dénominateur, pas juste l'un.
5. **Gendarmes mal appliqué.** Il faut $g \leq f \leq h$ *simultanément*, pas séquentiellement.