

Table des matières

1	Limite d'une fonction en un point	2
2	Limite d'une fonction en $\pm\infty$	3
3	Opérations sur les limites	3
4	Limite des fonctions trigonométriques	4
5	Limites et ordre	5

1 Limite d'une fonction en un point

Définition

Soient $a, \ell \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage $]a - x_0; a + x_0[$ (éventuellement privé de $\{a\}$), $x_0 > 0$.

- Si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a , on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$. Si elle existe, cette limite est **unique**.
- Si $f(x) \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) quand $x \rightarrow a$, on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).
- La limite **à droite** (resp. **à gauche**) en a , notée $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$), est la limite quand x tend vers a avec $x > a$ (resp. $x < a$).
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$.

Formes indéterminées : $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $+\infty - \infty$, $0 \times (\pm\infty)$.

Propriété

On admet les limites de référence suivantes (avec $n \in \mathbb{N}^*$) :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair.

Exemple

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

3 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

5 $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{3x-x^2}$

2 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 3x + 2}$

4 $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{3x-x^2}$

6 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

Application

On considère les fonctions :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \geq 3 \\ x^2 - 4x + 1, & x < 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{-x + 3}, & x \leq 2 \\ 1 - ax^2, & x > 2 \end{cases}$$

- 1** Calculer $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$. f admet-elle une limite en 3 ?
- 2** Déterminer une valeur de a pour laquelle g admet une limite en 2.

2 Limite d'une fonction en $\pm\infty$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{R}^*$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair.

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{k}{x^n} = 0$.

- Pour P, Q deux polynômes de termes de plus haut degré ax^n, bx^m :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{bx^m}.$$

- Si $f \geq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \geq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$. Si $\lim f = +\infty$, alors $\lim \sqrt{f} = +\infty$. (Idem en $-\infty$ ou en un point a .)

Exemple

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5}{4x^2}$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 5x^2 + 8x)$

5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 5}$

2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3 + x}{x^3}$

4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3 + 1)$

6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + 2x^3}{3x^3 + 5x^2 + 1}$

Application

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2 - \sqrt{3})x^3 - x^2}{2x^2 - 3}$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-4}}$

2 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{|x| - 3x}{|x + 5|}$

4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 5x + 1}$

3 Opérations sur les limites

Définition

Dans tout ce qui suit, a est réel ou $\pm\infty$, et ℓ, ℓ' sont réels. Le tableau suivant donne les opérations possibles sur les limites (avec F.I. pour forme indéterminée) :

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f + g)$	$\lim(fg)$	$\lim(f/g)$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\ell + \ell'$	$\ell\ell'$	ℓ/ℓ'
$\ell > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.
$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$	F.I.
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.	0
0	0	0	0	F.I.
$\ell \neq 0$	0	ℓ	0	$\pm\infty$

Exemple

Calculer les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-3 + \frac{1}{x} \right) \left(1 + \frac{2}{x} \right)$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x - 3}}{x}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x + 1)$$

Application

Calculer :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{4}{x^3}}{2 - x^5}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x)$$

4 Limite des fonctions trigonométriques

Propriété

- $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$.
- $\lim_{x \rightarrow a} \tan(x) = \tan(a)$ si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \tan(x) = -\infty$.
- $\sin, \cos, \tan$ n'admettent pas de limite en $\pm\infty$.
- Pour $a \neq 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{ax} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$.

Exemple

Calculer les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{x}$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(\pi x)}{x - 1}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{\tan(5x)}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(\sqrt{x})}{x}$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x}$$

Application

Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$.

5 Limites et ordre

Propriété

Soient $a, \ell \in \mathbb{R}$ et f, g, h des fonctions numériques. On suppose les inégalités vérifiées au voisinage de a (qui peut être $\pm\infty$ ou un réel).

- Si $g \leq f$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim f = +\infty$.
- Si $f \leq g$ et $\lim g = -\infty$, alors $\lim f = -\infty$.
- Si $|f - \ell| \leq g$ et $\lim g = 0$, alors $\lim f = \ell$.
- **Théorème des gendarmes** : si $g \leq f \leq h$ et $\lim g = \lim h = \ell$, alors $\lim f = \ell$.

Exemple

- 1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \cos x}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2 - \cos x}$.
- 2 Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2$. Vérifier que $|f(x) - 2| \leq |x|$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Application

Soit $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{x}$ pour $x > 0$.

- 1 Montrer que pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leq \frac{2}{x}$.
- 2 En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.