

Série d'exercices — Chapitre 5 : Logarithme népérien

2^e BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1 — Domaines de définition et simplification

1. Déterminer le domaine de définition de chaque fonction :

(a) $f_1(x) = \ln(x^2 - 4)$

(b) $f_2(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

(c) $f_3(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

2. Simplifier puis calculer (sans calculatrice) :

(a) $A = \ln(80) - 4\ln(2) - \ln(5)$

(d) $D = \ln\left(\frac{e^4\sqrt{e}}{e^2}\right)$

(b) $B = 2\ln(\sqrt{18}) - \ln(2) - 2\ln(3)$

(c) $C = \ln(e^3) - \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) + 4\ln(\sqrt{e})$

Exercice 2 — Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(3x - 1) = \ln(x + 5)$

4. $2(\ln x)^2 + \ln(x) - 6 = 0$

2. $\ln(x^2 - 1) = \ln(2x + 2)$

5. $3(\ln x)^2 + 2\ln(x) - 1 = 0$

3. $\ln(2x - 1) = \frac{3}{2}$

6. $\ln(x) + \ln(x - 2) = \ln(3)$

Exercice 3 — Inéquations et système

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(a) $\ln(1 - x) > \ln(x^2 + 1)$

(c) $\frac{\ln(x) + 3}{\ln(x) - 1} \geq -1$

(b) $\ln(6 - 2x) \leq 0$

(d) $\ln(x^2 - 3x + 2) > 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :
$$\begin{cases} 3\ln(x) + \ln(y) = 2 \\ 2\ln(x) - 3\ln(y) = 3 \end{cases}.$$

Exercice 4 — Calcul de limites

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - x$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x}$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{3x+5}{2x+1}\right)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x}$

8. $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \ln\left(\frac{3-2x}{x+1}\right)$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)^2$

Exercice 5 — Calcul de dérivées

Calculer la dérivée de chaque fonction sur un intervalle approprié :

1. $f_1(x) = \ln(x^2 + 1)$

2. $f_2(x) = \ln |\cos x|$

3. $f_3(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

4. $f_4(x) = (\ln x)^3 - 2 \ln(x^3)$

5. $f_5(x) = x^2 \ln(1 + x^2)$

6. $f_6(x) = \ln\left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)$

Exercice 6 — Primitives utilisant $\ln$

Déterminer une primitive de chaque fonction :

1. $f_1(x) = \frac{2}{2x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

2. $f_2(x) = \frac{x^3}{x^4+2}$ sur $\mathbb{R}$

3. $f_3(x) = \frac{1}{x-1}$ sur $] -\infty; 1[$

4. $f_4(x) = \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

5. $f_5(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$ (sur I approprié)

6. $f_6(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur $]1; +\infty[$

Exercice 7 — Étude $f(x) = x - \ln x$

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$.

- Déterminer D_f et calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Étudier les branches infinies.
- Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .
- Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ (allure).
- Démontrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.

Exercice 8 — Étude $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Calculer $f'(x)$ et étudier ses variations. Déterminer le maximum de f sur $]0; +\infty[$.
- En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq \frac{x}{e}$.
- Application : comparer e^π et π^e (*indication : utiliser que $f(\pi) < f(e)$*).

Exercice 9 — Logarithme de base a

Pour $a > 0$, $a \neq 1$, on rappelle $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

- Calculer $\log_2(8)$, $\log_3(27)$, $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\log_3(2x)(\log_5(x) - 1) = 0$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2(\log x)^2 - 19 \log(x) - 10 = 0$.
- Résoudre $\log_2(x) + \log_4(x) = 3$ (*indication : $\log_4(x) = \frac{\log_2(x)}{2}$*).

Exercice 10 — Synthèse : étude complète

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln(x)$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Vérifier que $f(x) = \ln x (\ln x - 2)$ et résoudre $f(x) = 0$.

3. Calculer $f'(x)$, étudier son signe, et dresser le tableau de variations de f .
4. Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion à déterminer.
5. Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x = 1$.