

Table des matières

1 Le logarithme népérien

1.1 Définition

Activité

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$; elle admet donc une primitive sur $]0; +\infty[$. Parmi toutes ses primitives, il en existe une seule qui s'annule en 1.

Définition

L'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée *fonction logarithme népérien*, notée $\ln$.

Conséquences

- $D_{\ln} =]0; +\infty[$; $\ln(1) = 0$.
- $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[, (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Proposition

Soient $x, y \in]0; +\infty[$.

- $\ln(x) \leq \ln(y) \iff x \leq y$.
- $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$.

Exemple

« Domaine de définition d'une fonction logarithmique. »

Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

Solution. $\ln(x^2 - 1)$ est défini ssi $x^2 - 1 > 0$, c.-à-d. $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. Donc $D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

Application

Déterminer le domaine de définition de chaque fonction :

- $f_1(x) = \ln(1 - x)$
- $f_2(x) = \ln(x^2 + 1)$
- $f_3(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

À faire à la maison

- 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$: (a) $\ln(3x - 1) = \ln(1 - x)$; (b) $\ln(2x + 5) > \ln(x^2 + 4)$.
- 2 Soit $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 4}{x + 1}\right)$. Déterminer D_f .
- 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln(x) + \ln(x - 2) = \ln(3)$.

2 Propriétés algébriques

Propriétés

Soient $a, b \in]0; +\infty[$, $r \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln(a^n) = n \ln(a)$
- $\ln(a^r) = r \ln(a)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

Remarque

- Si $xy > 0$, alors $\ln(xy) = \ln(|x|) + \ln(|y|)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\ln(x^2) = 2 \ln(|x|)$.

Exemple

« Écriture en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$. »

Écrire $A = \ln(80)$ en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$.

Solution. $80 = 2^4 \times 5$, donc :

$$A = \ln(2^4 \times 5) = \ln(2^4) + \ln(5) = 4 \ln(2) + \ln(5).$$

Application

Écrire en fonction de $\ln(2)$:

- $A = 3 \ln(2) + \ln(4)$
- $B = \ln(\sqrt{8})$
- $C = \ln(20) - \ln(5)$

À faire à la maison

- 1 Soient $a, b > 0$. Démontrer (en utilisant les propriétés algébriques) que $\ln(a^2 b^3) - \ln\left(\frac{a}{b}\right) = 2 \ln(a) + 4 \ln(b)$.
- 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2(\ln x)^2 + \ln(x) - 6 = 0$.
- 3 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} 3 \ln(x) + \ln(y) = 2 \\ 2 \ln(x) - 3 \ln(y) = 3 \end{cases}$.

3 Le nombre e et limites de référence

3.1 Le nombre e

Définition

La fonction $\ln$ étant continue et strictement croissante de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) affirme l'existence d'un unique réel, noté e , tel que $\ln(e) = 1$. On a $e \approx 2,718$.

Conséquences

Pour tout $r \in \mathbb{Q}$:

- $\ln(e^r) = r$.
- $\ln(x) = r \iff x = e^r$.

Exemple

« Simplifier des expressions avec e . »

Simplifier $A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$.

Solution. $A = 2 + 4 - (-1) = 7$.

3.2 Limites essentielles

Propriété

- | | | |
|---|---|---|
| • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ | • $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ | • $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ |
| • $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ | • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0, n \in \mathbb{N}^*$ | |
| • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ | • $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0, n \in \mathbb{N}^*$ | • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ |

Exemple

« Calcul d'une limite par croissance comparée. »

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x}$.

Solution. On écrit $\frac{(\ln x)^3}{x} = \left(\frac{\ln x}{x^{1/3}}\right)^3$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}} = 0$, donc la limite cherchée est 0.

Application

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - x$

3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x}$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x}$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

À faire à la maison

1 Calculer les limites :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2 - \ln x}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (\ln x)^3$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

2 Soit $f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ pour $x > -1, x \neq 0$.

a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (indication : utiliser la dérivabilité de $\ln$ en 1).

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4 Étude et représentation graphique de ln

4.1 Tableau de variations

La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ avec $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, et $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x)$		+		
$\ln$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

4.2 Concavité

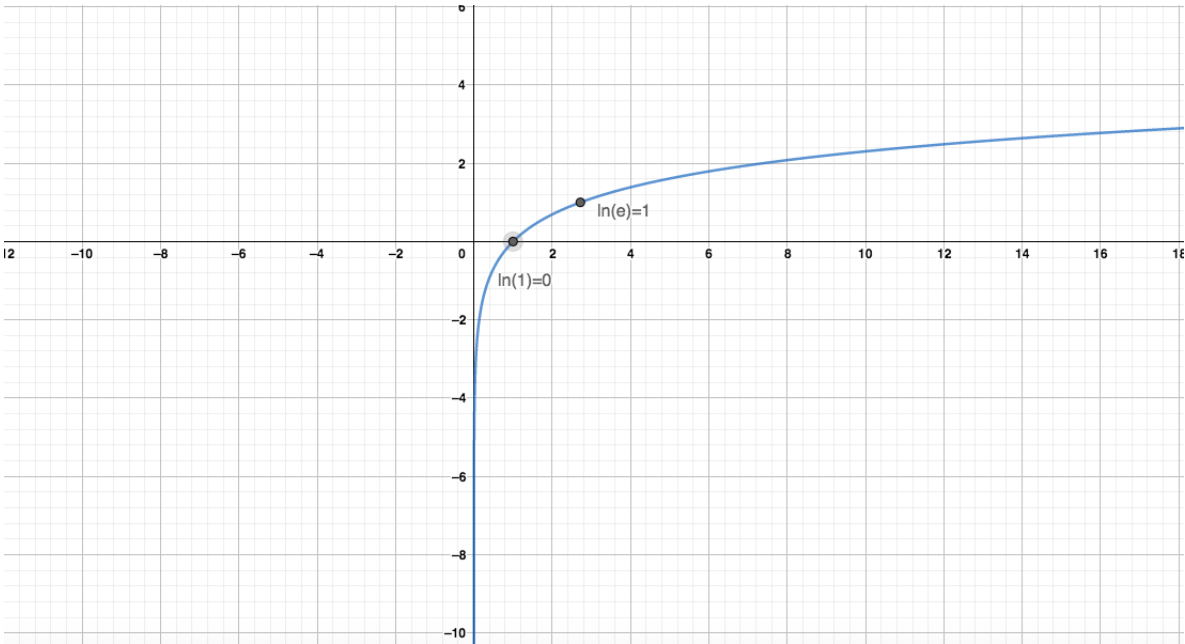
Proposition

La fonction ln est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Donc $\ln''(x) < 0$ pour tout $x > 0$, et la courbe $(\mathcal{C}_{\ln})$ est **concave** sur $]0; +\infty[$.

4.3 Branches infinies

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$: asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$: branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$.

4.4 Courbe représentative



4.5 Signe de $\ln$

Conséquences

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		-	0 +

5 Dérivée et primitive de $\ln \circ u$

Proposition

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I . Si u ne s'annule pas sur I , alors la fonction $x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \quad (\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Exemple

« Dérivée de $\ln \circ u$. »

Calculer la dérivée de $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. On pose $u(x) = x^2 + 1 > 0$, donc $\ln|u(x)| = \ln(u(x))$ et :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Application

Calculer la dérivée de chaque fonction sur un intervalle approprié :

1 $f_1(x) = \ln|x^2 - 4x + 3|$

2 $f_2(x) = \ln(\cos x)$

3 $f_3(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Proposition

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I . Les primitives de $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont :

$$x \mapsto \ln|u(x)| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple

« Primitive d'une forme $\frac{u'}{u}$. »

Déterminer une primitive de $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. On pose $u(x) = x^4 + 2 > 0$, alors $u'(x) = 4x^3$. On écrit $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$, donc une primitive est :

$$F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 2).$$

Application

Déterminer une primitive de chaque fonction :

1 $f_1(x) = \frac{2}{2x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

2 $f_2(x) = \frac{1}{x-1}$ sur $] -\infty; 1[$.

3 $f_3(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ sur $\left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$.

4 $f_4(x) = \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Proposition

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b > 0$ et u une fonction strictement positive au voisinage de a .

- $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} \ln(u(x)) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0^+ \implies \lim_{x \rightarrow a} \ln(u(x)) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \implies \lim_{x \rightarrow a} \ln(u(x)) = \ln(b)$.

Application

Calculer les limites :

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{3x+5}{2x+1}\right)$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2+3x-5}{x+2}\right)$

• $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \ln\left(\frac{3-2x}{x+1}\right)$

À faire à la maison

1 Calculer les dérivées :

• $f_1(x) = (\ln x)^3 - 2 \ln(x^3)$

• $f_2(x) = \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$

• $f_3(x) = x^2 \ln(1+x^2)$

• $f_4(x) = \ln |\tan x|$

2 Déterminer une primitive de chaque fonction :

• $g_1(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$

• $g_2(x) = \frac{1-2x}{x^2-x+1}$

• $g_3(x) = \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

• $g_4(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur $]1; +\infty[$

3 Étudier la fonction $f(x) = x - \ln x$ sur $]0; +\infty[$: domaine, dérivée, variations, branches infinies, et tracer l'allure de (C_f) .

6 Fonctions logarithmiques de base a

6.1 Définition

Définition

Soit a un réel strictement positif tel que $a \neq 1$. La fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ est appelée *fonction logarithme de base a* , et notée $\log_a$. Ainsi :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \forall x \in]0; +\infty[.$$

Conséquences

Pour $a > 0, a \neq 1$:

- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(e) = \frac{1}{\ln a}$
- $\log_e = \ln$

6.2 Propriétés algébriques

Propriétés

Soient $x, y \in]0; +\infty[$, $r \in \mathbb{Q}$, $a > 0, a \neq 1$.

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$
- $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$

Proposition

Soit $a > 0, a \neq 1$.

- $\forall x, y \in]0; +\infty[: \log_a(x) = \log_a(y) \iff x = y.$
- $\forall x > 0, \forall r \in \mathbb{Q} : \log_a(x) = r \iff x = a^r.$

Exemple

« Calcul direct. »

Calculer $A = \log_2(8) - \log_3(27) + \log_5\left(\frac{1}{125}\right).$

Solution.

$$A = \log_2(2^3) - \log_3(3^3) + \log_5(5^{-3}) = 3 - 3 - 3 = -3.$$

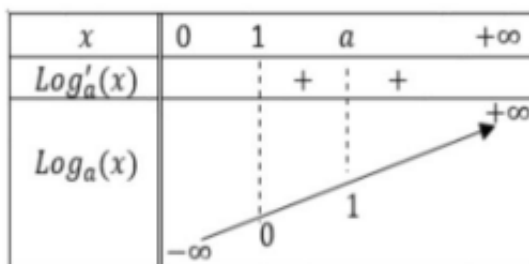
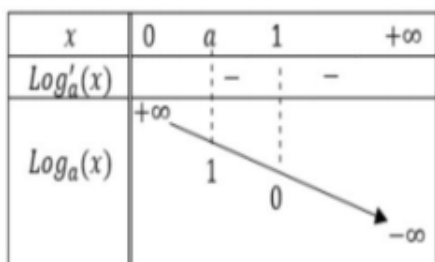
6.3 Dérivée et variations

Proposition

La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall x > 0, (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

- Si $a > 1$: $\log_a$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- Si $0 < a < 1$: $\log_a$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.



6.4 Logarithme décimal

Définition

La fonction $\log_{10}$ est appelée *logarithme décimal* et notée simplement $\log$:

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}, \quad \forall x \in]0; +\infty[.$$

Propriétés

Soient $x \in]0; +\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$.

- $\log(10^r) = r$
- $\log(x) = r \iff x = 10^r$
- $\log(x) > r \iff x > 10^r$
- $\log(x) < r \iff 0 < x < 10^r$

Exemple

« Calcul avec log décimal. »

Simplifier $A = \log(25000) + \log(\sqrt{250}) - \log(125)$.

Solution.

$$A = \log\left(\frac{25000 \times \sqrt{250}}{125}\right) = \log(200\sqrt{250}).$$

Or $200\sqrt{250} = 200 \times \sqrt{250}$; comme $\sqrt{250} = 5\sqrt{10}$, on obtient $200 \times 5\sqrt{10} = 1000\sqrt{10}$. D'où :

$$A = \log(1000) + \log(\sqrt{10}) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1 $\log_3(2x)(\log_5(x) - 1) = 0$

2 $2(\log x)^2 - 19\log(x) - 10 = 0$

À faire à la maison

- 1** Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\log_2(x) + \log_4(x) = 3$ (*indication* : $\log_4(x) = \log_2(x)/2$).
- 2** Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\log_{2x}(4x) + \log_{4x}(16x) = 4$.
- 3** Le pH d'une solution est défini par $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$ où $[\text{H}^+]$ est la concentration en ions hydrogène en mol/L. Si une solution a un pH de 3,5, calculer $[\text{H}^+]$. Si on multiplie cette concentration par 100, quel est le nouveau pH?