

Exercice

n°1

Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1. $p : \sqrt{25} - \sqrt{9} = 2.$

3. $r : \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}.$

2. $q : (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}.$

4. $s : \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$

Exercice

n°2

Préciser la valeur de vérité des propositions suivantes.

1. $p : 12$ est un multiple de 4 *et* un multiple de 6.

3. $r : 0 \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \in \mathbb{Z}.$

2. $q : \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ *ou* $\pi^2 < 10.$

4. $s : (\pi < 3) \Leftrightarrow (2^{10} = 1024).$

Exercice

n°3

Pour chacune des propositions suivantes :

1. donner sa valeur de vérité ;

2. écrire sa négation.

a) $(\forall x \in \mathbb{R}), x^2 + 1 > 0.$

c) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}), m > n.$

b) $(\exists x \in \mathbb{R}), x^2 = 2.$

d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), x + y = 0.$

Exercice

n°4

Écrire chacune des phrases suivantes à l'aide des quantificateurs.

1. Tout entier naturel non nul a un carré strictement positif.

2. Il existe un réel positif dont le cube vaut 8.

3. Pour tout réel x , il existe un réel y tel que $x + y = 1.$

4. Aucun entier naturel n'est strictement négatif.

Exercice

n°5

Soient a et b deux réels positifs. Montrer par déduction que :

$$a + b \leq 2 \implies ab \leq 1.$$

Exercice

n°6

1. Montrer par contraposée que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ est divisible par } 3 \implies n \text{ est divisible par } 3.$$

2. En déduire que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}.$

Exercice**n°7**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par disjonction des cas (selon la parité de n) que :

1. $n^2 + n$ est pair ;
2. $n^2 + n + 1$ est impair.

Exercice**n°8**

Montrer que pour tous réels x et y :

$$x^2 + y^2 = 2xy \iff x = y.$$

Exercice**n°9**

Soient a , b et c trois nombres réels.

Montrer par l'absurde que si $a + b + c > 0$, alors au moins l'un des trois nombres a , b , c est strictement positif.

Exercice**n°10**

Montrer par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice**n°11**

Soient x et y deux réels positifs.

1. Montrer que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.
2. En déduire que si $xy = 1$, alors $x + y \geq 2$.
3. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$. Montrer par contraposée que :

$$x + y < 2 \implies xy < 1.$$

Exercice**n°12**

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant par une démonstration ou par un contre-exemple.

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n^2$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1}$.
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| = |x| + |y|$.