

# Série d'exercices N°1

## Notions de Logique

1<sup>ère</sup> Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

**Consignes.** Les exercices sont classés par type de raisonnement (du plus simple au plus exigeant). Pour chaque démonstration, on attend une rédaction complète, structurée et justifiée.

**Couverture.** 14 exercices : écriture symbolique, négations, lois logiques, contre-exemple, raisonnement direct, contraposée, équivalences successives, disjonction des cas, raisonnement par l'absurde, récurrences (sommes, divisibilité, inégalités).

### I. Écriture symbolique, quantificateurs et négations

#### Exercice 1 *Écriture symbolique*

Écrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs  $\forall$  et  $\exists$ , puis donner leur valeur de vérité.

1.  $P$  : Pour tout entier naturel  $n$ , il existe un entier naturel  $m$  tel que  $n + m = 10$ .
2.  $Q$  : Il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $x \leq M$ .
3.  $R$  : Il existe un nombre rationnel dont le carré vaut 2.
4.  $S$  : Aucun nombre rationnel n'est solution de l'équation  $x^2 = 2$ .
5.  $T$  : Entre deux réels distincts, il existe toujours un rationnel.

#### Exercice 2 *Négation et valeur de vérité*

Déterminer la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes.

1.  $P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}) \ x^2 - x - 2 \geq 0$ .
2.  $P_2 : (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \ y < -2x$ .
3.  $P_3 : (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \ y < -2x$ .
4.  $P_4 : (\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*) \ x + y \geq 1$ .
5.  $P_5 : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \ y \neq \sin(x)$ .

#### Exercice 3 *Négation de propositions du langage courant*

Donner la négation de chacune des phrases suivantes.

1.  $P$  : Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.
2.  $Q$  : Certains entiers naturels sont pairs.
3.  $R$  : Tout entier naturel divisible par 9 est divisible par 3.
4.  $S$  : Il existe un élève de la classe qui parle au moins trois langues.

#### Exercice 4 *Négation de propositions composées*

Déterminer la négation des propositions suivantes.

1.  $P : (\forall x \in \mathbb{R}) \ (x \geq 0 \text{ ou } x \leq 0)$ .
2.  $Q : (\exists x \in \mathbb{R}) \ (x^2 \leq 5 \text{ et } x \in \mathbb{Z})$ .

3.  $R : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) \quad x \leq y - 1 \Rightarrow (x + y)^2 \leq xy.$

4.  $S : \text{Soient } a, b, c \in \mathbb{R}. \quad a > b \Rightarrow a \leq c.$

### Exercice 5 *Lois logiques par tables de vérité*

Soient  $P, Q, R$  des propositions quelconques. Montrer, en dressant la table de vérité, que chacune des propositions suivantes est une loi logique.

1.  $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$  (loi de De Morgan).

2.  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$  (forme disjonctive).

3.  $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$  (*modus ponens*).

4.  $[(P \Rightarrow Q) \wedge \overline{Q}] \Rightarrow \overline{P}$  (*modus tollens*).

5.  $[P \Rightarrow (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge \overline{Q}) \Rightarrow R].$

## II. Types de raisonnement

### Exercice 6 *Raisonnement par contre-exemple*

Étudier la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes. Pour celles qui sont fausses, donner un contre-exemple explicite.

1. Tous les nombres premiers sont impairs.

2.  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n^2 - n + 11$  est un nombre premier.

3.  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2} = x.$

4.  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad (x + y)^2 = x^2 + y^2.$

5.  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2^n - 1$  est un nombre premier.

### Exercice 7 *Raisonnement direct*

1. Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x - 3| \leq 1 \Rightarrow |2x + 1| \leq 9.$

2. Soit  $a > 0$ . Montrer que  $a + \frac{4}{a} \geq 4.$

3. Montrer que :  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2) \quad \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$

4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $n^2 + n + 1$  est impair.

### Exercice 8 *Raisonnement par contraposée*

Démontrer par contraposée chacune des implications suivantes.

1.  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair}.$

2.  $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad n^2 + 1 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ impair}.$

3. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq -b$ .  $\frac{a-b}{a+b} \neq -3 \Rightarrow b \neq -2a.$

4.  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \text{ et } y \neq 0.$

5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $n^3 + 2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}.$

**Exercice 9** *Raisonnement par équivalences successives*

Résoudre dans l'ensemble indiqué en justifiant chaque équivalence.

1. Dans  $\mathbb{R}$  :  $|2x - 3| \leq 5$ .
2. Dans  $\mathbb{R}$  :  $\sqrt{x^2 - 1} = x + 1$ .
3. Dans  $\mathbb{R}$  :  $\frac{x - 2}{x + 1} \leq 3$ .
4. Dans  $\mathbb{R}$  :  $x^2 + |x| - 2 = 0$ .

**Indication.** Pour les questions avec radicaux ou valeurs absolues, vérifier la *réversibilité* de chaque étape (signe des deux membres, domaine de définition).

**Exercice 10** *Raisonnement par disjonction des cas*

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $-x^2 + |x - 4| + 2 = 0$ .
2. Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \ n(n + 1)(n + 2)$  est divisible par 3.
3. Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) \ x^2 - x + 1 \geq |x - 1|$ .
4. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Montrer que  $n(n^2 - 1)$  est divisible par 6.

**Exercice 11** *Raisonnement par l'absurde*

1. Montrer que  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ .
2. Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $ab = 1$ . Montrer que  $a \leq 1$  ou  $b \leq 1$ .
3. Soient  $a, b \in \mathbb{Q}$  tels que  $a + b\sqrt{2} = 0$ . Montrer que  $a = 0$  et  $b = 0$ .
4. Soit  $ABC$  un triangle et  $a > 0$  tels que  $BC = 3a$ ,  $CA = 2a$ ,  $AB = 4a$ . Montrer que  $ABC$  n'est pas rectangle.
5. Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2) \ \frac{n + 3}{n + 1} \notin \mathbb{Z}$ .

**III. Raisonnement par récurrence****Exercice 12** *Sommes classiques*

Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

1.  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n + 1)}{2}$ .
2.  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$ .
3.  $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2$ .
4.  $\sum_{k=0}^n (2k + 1) = (n + 1)^2$ .
5.  $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n + 1)! - 1$ .

$$6. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

**Exercice 13** *Divisibilité par récurrence*

Montrer par récurrence que :

1.  $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 3^{2n} - 1$  est divisible par 8.
2.  $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 4^n + 5$  est divisible par 3.
3.  $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 7^n - 1$  est divisible par 6.
4.  $(\forall n \in \mathbb{N}) \ n(n^2 + 5)$  est divisible par 6.
5.  $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$  est divisible par 7.

**Exercice 14** *Inégalités et autres récurrences*

1. Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 2^n \geq n + 1$ .
2. Soit  $a > -1$ . Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \ (1 + a)^n \geq 1 + na$  (*inégalité de Bernoulli*).
3. Montrer que :  $(\forall n \geq 4) \ n! \geq 2^n$ .
4. Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ .
5. Soit  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .

**IV. Exercice de synthèse**
**Exercice 15** *Synthèse – niveau examen*
**Partie A – Quantificateurs et négation.**

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Traduire en langage symbolique avec quantificateurs :
  - (a)  $f$  est paire.
  - (b)  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
  - (c)  $f$  est majorée sur  $\mathbb{R}$ .
2. Donner la négation de chacune des propositions précédentes.

**Partie B – Raisonnement.**

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En remarquant que  $n(n+1)$  est pair (voir Exercice 10, question 2), montrer directement que  $n^2 + n + 1$  est impair.
4. Montrer par l'absurde que  $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ .
5. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ .
  - (a) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 1 \leq u_n < 2$ .
  - (b) En déduire que la suite est strictement croissante (i.e.  $u_{n+1} > u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ).

---

*Fin de la série – Notions de Logique*