

Notions de Logique

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire : 8h (selon la répartition officielle 2013) – **Pré-requis** : Tronc commun (logique élémentaire, ensembles de nombres).

Capacités attendues : transformer un énoncé en écriture symbolique avec connecteurs et quantificateurs (et inversement) ; utiliser le raisonnement adapté à la situation ; rédiger des démonstrations claires et logiquement correctes.

Table des matières

1	Proposition, fonction propositionnelle, quantificateurs	2
1.1	Proposition	2
1.2	Fonction propositionnelle	3
1.3	Quantificateurs	3
1.4	Permutation des quantificateurs	4
2	Négation d'une proposition	5
2.1	Négation d'une proposition simple	5
2.2	Négation des propositions quantifiées	5
3	Opérations sur deux propositions	7
3.1	Conjonction et disjonction	7
3.2	Implication et équivalence	7
3.3	Négations des connecteurs	8
3.4	Propriétés algébriques des connecteurs	9
3.5	Distribution sur les quantificateurs	9
4	Lois logiques (tautologies)	11
4.1	Définition	11
4.2	Lois logiques fondamentales	11
5	Raisonnements mathématiques	13
5.1	Raisonnement par contre-exemple	13
5.2	Raisonnement déductif (direct)	13
5.3	Raisonnement par contraposée	14
5.4	Raisonnement par équivalences successives	15
5.5	Raisonnement par disjonction des cas	16
5.6	Raisonnement par l'absurde	16
5.7	Notations Σ et Π	17
5.8	Raisonnement par récurrence	18
6	Synthèse	20
6.1	Tableau récapitulatif des opérations logiques	20
6.2	Stratégie de choix du type de raisonnement	20
6.3	Pièges classiques à éviter	20

1. Proposition, fonction propositionnelle, quantificateurs

Activité

On considère les énoncés suivants :

- (a) « $2 + 3 = 5$ » (E1)
- (b) « Tout nombre réel est positif » (E2)
- (c) « $x^2 \geq 0$ » où x désigne un nombre réel (E3)
- (d) « Bonjour ! » (E4)
- (e) « Pour tout réel x , on a $x^2 \geq 0$ » (E5)

Pour chacun, indiquer s'il est doué d'un sens mathématique, et le cas échéant, s'il est vrai, faux, ou dépend d'une valeur particulière.

1.1 Proposition

Définition

Définition 1.1 — Une **proposition** (ou **assertion**) est tout énoncé mathématique *ayant un sens* et qui peut être soit *vrai*, soit *faux*, mais *jamais les deux à la fois*.

- Si la proposition P est vraie, sa **valeur de vérité** est notée **V** (ou 1).
- Si elle est fausse, sa valeur de vérité est notée **F** (ou 0).

Notations. Les propositions sont usuellement notées par les lettres majuscules $P, Q, R, \dots$. La **table de vérité** d'une proposition P recense les valeurs possibles que peut prendre P :

P
V
F

Exemple

Exemple 1.1 — Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

- P_1 : « $1 \in \mathbb{Z}$ »
- P_2 : « $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$ »
- P_3 : « 2 est un nombre décimal »
- P_4 : « 2 est l'unique entier naturel pair et premier »
- P_5 : « Un carré est un parallélogramme »

Solution.

- P_1 : **V**, car 1 est un entier relatif.
- P_2 : **F**, car $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ tandis que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Or $5 \neq 7$.
- P_3 : **V**, car $2 = 2,0$ admet une écriture décimale finie.
- P_4 : **V**. Tout entier pair $n > 2$ admet 2 comme diviseur *propre* ($1 < 2 < n$), donc n n'est pas premier. Seul 2 est à la fois pair et premier.
- P_5 : **V**, le carré est un cas particulier de parallélogramme.

1.2 Fonction propositionnelle

Définition

Définition 1.2 — Une **fonction propositionnelle** (ou **prédicat**) est un énoncé mathématique contenant une (ou plusieurs) **variable(s)** dans un ensemble E , qui devient une proposition dès qu'on substitue à la variable un élément de E .

On la note $P(x)$, $Q(x, y)$, $R(x, y, z)$... selon le nombre de variables.

Exemple

Exemple 1.2 — Soient $P(x) : \ll x^2 \geq 0 \gg$, $Q(n) : \ll n \text{ est pair} \gg$, $R(x, y) : \ll x + y = 5 \gg$, dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.

- $P(3) : \ll 9 \geq 0 \gg$, c'est une proposition **vraie**.
- $Q(4) : \ll 4 \text{ est pair} \gg$, **vraie** ; tandis que $Q(7)$ est **fausse**.
- $R(2, 3) : \ll 2 + 3 = 5 \gg$, **vraie** ; tandis que $R(1, 1)$ est **fausse**.

1.3 Quantificateurs

Pour transformer une fonction propositionnelle $P(x)$ en proposition, on *quantifie* la variable.

Définition

Définition 1.3 — Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle définie sur un ensemble E non vide.

- Le **quantificateur universel** $\forall$ se lit « pour tout » ou « quel que soit ». La proposition

$$(\forall x \in E) P(x)$$

est **vraie** ssi $P(x)$ est vraie pour *tout* élément x de E .

- Le **quantificateur existentiel** $\exists$ se lit « il existe (au moins un) ». La proposition

$$(\exists x \in E) P(x)$$

est **vraie** ssi il existe *au moins un* élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie.

- Le symbole $\exists!$ se lit « il existe un unique ». La proposition $(\exists! x \in E) P(x)$ est vraie ssi il existe *exactement un* élément x de E vérifiant $P(x)$.

Exemple

Exemple 1.3 — Écrire les propositions suivantes à l'aide de quantificateurs, puis déterminer leur valeur de vérité.

$P : \ll \text{L'équation } x^2 + x + 1 = 0 \text{ admet au moins une solution réelle.} \gg$

$Q : \ll \text{Tout entier naturel est positif ou nul.} \gg$

$R : \ll \text{Certains nombres réels ne sont pas rationnels.} \gg$

$S : \ll \text{L'équation } 2x + 1 = 0 \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}. \gg$

Solution.

- $P : (\exists x \in \mathbb{R}) x^2 + x + 1 = 0$. **Fausse** : le discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$.
- $Q : (\forall n \in \mathbb{N}) n \geq 0$. **Vraie** par définition de $\mathbb{N}$.
- $R : (\exists x \in \mathbb{R}) x \notin \mathbb{Q}$. **Vraie** : $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (voir section 5).
- $S : (\exists! x \in \mathbb{R}) 2x + 1 = 0$. **Vraie** : l'unique solution est $x = -\frac{1}{2}$.

1.4 Permutation des quantificateurs

Propriété

Propriété 1.1 — Soient $P(x, y)$ une fonction propositionnelle sur $E \times F$.

(a) On peut *permuter* deux quantificateurs de même nature :

$$(\forall x \in E)(\forall y \in F) P(x, y) \Leftrightarrow (\forall y \in F)(\forall x \in E) P(x, y)$$

$$(\exists x \in E)(\exists y \in F) P(x, y) \Leftrightarrow (\exists y \in F)(\exists x \in E) P(x, y)$$

(b) On ne peut *pas* permuter des quantificateurs de natures différentes : en général

$$(\forall x \in E)(\exists y \in F) P(x, y) \text{ n'équivaut pas à } (\exists y \in F)(\forall x \in E) P(x, y).$$

Remarque

Dans l'énoncé $(\forall x)(\exists y) P(x, y)$, l'élément y *dépend* de x (il peut varier avec lui). En revanche dans $(\exists y)(\forall x) P(x, y)$, l'élément y est fixé une fois pour toutes, indépendamment de x : c'est une condition strictement plus forte.

Illustration concrète. La phrase « Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone » est vraie – chacun a un numéro. Mais « Il existe un numéro de téléphone valable pour toute personne » est fausse : il faudrait que tout le monde ait le même numéro.

Exemple

Exemple 1.4 — Étudier la valeur de vérité des propositions suivantes :

$$P_1 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) y > x \quad P_2 : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) y > x$$

Solution.

- P_1 : **Vraie**. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit de poser $y = x + 1$; alors $y > x$.
- P_2 : **Fausse**. Si un tel y existait, on aurait $y > x$ pour *tout* $x \in \mathbb{R}$; en prenant $x = y$, on obtiendrait $y > y$, ce qui est absurde.

Application

1. Écrire avec des quantificateurs et déterminer la valeur de vérité :

- (a) T : « Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel m on a $m = 2n$. »
- (b) U : « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $y > x$. »
- (c) V : « Il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y > x$. »

2. Étudier la valeur de vérité de :

$$A_1 : (\exists x \in \mathbb{R}) x^2 = 4 \quad A_2 : (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$A_3 : (\exists x \in \mathbb{N}) 3x - 1 = 0 \quad A_4 : (\forall x \in \mathbb{R}) |x| = x$$

2. Négation d'une proposition

2.1 Négation d'une proposition simple

Définition

Définition 2.1 — Soit P une proposition. La **négation** de P , notée $\overline{P}$ (ou $\neg P$, ou « non P »), est la proposition qui est *vraie* lorsque P est fausse, et *fausse* lorsque P est vraie.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Propriété

Propriété 2.1 — Pour toute proposition P : $\overline{(\overline{P})} \Leftrightarrow P$ (loi de double négation).

Exemple

Exemple 2.1 — Écrire la négation des propositions suivantes et préciser leur valeur de vérité :

- (a) $P : 1 + \sqrt{4} = 3$
- (b) $Q : \sqrt{11} \in [3; 4]$
- (c) $R : \pi > 3,14$

Solution.

- $\overline{P} : 1 + \sqrt{4} \neq 3$. Or $1 + 2 = 3$, donc P est **vraie** et $\overline{P}$ est **fausse**.
- $\overline{Q} : \sqrt{11} \notin [3; 4]$. Comme $3^2 = 9 \leq 11 \leq 16 = 4^2$, on a $\sqrt{11} \in [3; 4]$, donc Q est **vraie**.
- $\overline{R} : \pi \leq 3,14$. Or $\pi = 3,14159 \dots > 3,14$, donc R est **vraie**.

2.2 Négation des propositions quantifiées

Théorème

Théorème 2.1 — Soient E un ensemble non vide et $P(x)$ une fonction propositionnelle sur E .

- (a) $\overline{(\forall x \in E) P(x)} \Leftrightarrow (\exists x \in E) \overline{P(x)}$
- (b) $\overline{(\exists x \in E) P(x)} \Leftrightarrow (\forall x \in E) \overline{P(x)}$

Méthode

Comment nier une proposition quantifiée.

1. Remplacer chaque $\forall$ par $\exists$ et chaque $\exists$ par $\forall$.
2. Nier la fonction propositionnelle qui suit les quantificateurs.
3. Respecter l'ordre d'apparition des quantificateurs : il ne change *pas*.

Exemple

Exemple 2.2 — Écrire la négation des propositions suivantes :

- (a) $A : (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq 0$

- (b) $B : (\exists x \in \mathbb{N}) 2x = 7$
 (c) $C : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) y = 2x$
 (d) $D : (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq M$ (« la suite (u_n) est majorée »)

Solution.

- $\overline{A} : (\exists x \in \mathbb{R}) x^2 < 0$. (Fausse, donc A est vraie.)
- $\overline{B} : (\forall x \in \mathbb{N}) 2x \neq 7$. (Vraie : $2x$ est pair pour $x \in \mathbb{N}$.)
- $\overline{C} : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) y \neq 2x$. (Fausse, donc C est vraie.)
- $\overline{D} : (\forall M \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}) u_n > M$ (« (u_n) n'est pas majorée »).

Remarque

Quelques résultats utiles à retenir :

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad ; \quad x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (\exists (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*) \left(x = \frac{a}{b} \text{ et } \text{pgcd}(a, b) = 1 \right)$$

Convention de notation. Dans ce cours, le symbole « $\wedge$ » désigne exclusivement la **conjonction logique**. Pour le **plus grand commun diviseur**, on utilise $\text{pgcd}(a, b)$.

Application

Déterminer la négation et la valeur de vérité de :

$$P_1 : (\exists x \in \mathbb{N}) x^2 = 36 \quad P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}) x^3 > x$$

$$P_3 : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N}) y = 2n \quad P_4 : (\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) n + m = 0$$

3. Opérations sur deux propositions

Soient P et Q deux propositions.

3.1 Conjonction et disjonction

Définition

Définition 3.1 —

- La **conjonction** de P et Q , notée $P \wedge Q$ (lue « P et Q »), est la proposition qui est vraie *uniquement* si P et Q sont vraies en même temps.
- La **disjonction** de P et Q , notée $P \vee Q$ (lue « P ou Q »), est la proposition qui est vraie si *au moins l'une* des deux propositions est vraie.

3.2 Implication et équivalence

Définition

Définition 3.2 —

- L'**implication** $P \Rightarrow Q$ (lue « P implique Q ») est la proposition qui est *fausse* uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse.
- L'**équivalence** $P \Leftrightarrow Q$ (lue « P équivaut à Q ») est vraie lorsque P et Q ont la *même valeur de vérité*.

Table de vérité commune.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Remarque

Lectures alternatives de l'implication $P \Rightarrow Q$:

- « Si P , alors Q » ;
- « P est une condition **suffisante** pour Q » ;
- « Q est une condition **nécessaire** pour P » ;
- « Pour que Q , il suffit que P » ;
- « Pour que P , il faut que Q ».

L'**implication réciproque** de $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$. Attention : $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ *n'ont pas la même table de vérité* ; l'implication n'est pas commutative.

Lectures de l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$:

- « P si et seulement si Q » ;
- « P est une condition **nécessaire et suffisante** pour Q ».

Exemple**Exemple 3.1** — Déterminer la valeur de vérité de :

- (a) $2 < 7$ et $10 = 5$
- (b) $2 < 7$ ou $10 = 5$
- (c) $\pi \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \neq 2$
- (d) $1 = 2 \Rightarrow 3 = 4$
- (e) $5 \text{ est impair} \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq 0$
- (f) $|-4| = 4 \Leftrightarrow 3 \leq 12$

Solution.

- (a) F (car $10 = 5$ est fausse). (b) V (car $2 < 7$ est vraie).
- (c) V ($\pi \notin \mathbb{N}$, l'antécédent est faux, donc l'implication est vraie).
- (d) V (les deux propositions sont fausses, donc l'implication est vraie).
- (e) V (les deux propositions sont vraies, l'implication est vraie).
- (f) V ($|-4| = 4$ est vraie et $3 \leq 12$ est vraie).

3.3 Négations des connecteurs**Théorème****Théorème 3.1** — (Lois de De Morgan). Pour toutes propositions P et Q :

- (a) $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$
- (b) $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$
- (c) $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$
- (d) $\overline{P \Leftrightarrow Q} \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$

Démonstration

On démontre (a), (b), (c) en construisant la table de vérité commune.

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V	F	V	V

On lit les égalités de colonnes : $\overline{P \wedge Q}$ et $\overline{P} \vee \overline{Q}$ coïncident, prouvant (a) ; de même $\overline{P \vee Q}$ et $\overline{P} \wedge \overline{Q}$ coïncident, prouvant (b).

Pour (c), on dresse :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P \Rightarrow Q}$	$\overline{Q}$	$P \wedge \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Les colonnes $\overline{P \Rightarrow Q}$ et $P \wedge \overline{Q}$ sont identiques.(d) se traite de même par table de vérité (laissé en application). □

3.4 Propriétés algébriques des connecteurs

Propriété

Propriété 3.1 — Pour toutes propositions P, Q, R :

Commutativité : $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ et $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$.

Associativité : $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ et $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$.

Distributivité :

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Forme disjonctive de l'implication :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$$

Démonstration

On démontre la distributivité $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ par table de vérité (les 8 lignes correspondent aux 8 affectations possibles de P, Q, R).

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Les colonnes encadrant l'équivalence à démontrer sont identiques. □

Forme disjonctive. Comparons $P \Rightarrow Q$ et $\bar{P} \vee Q$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P}$	$\bar{P} \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Colonnes identiques, donc $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$. □

3.5 Distribution sur les quantificateurs

Propriété

Propriété 3.2 — Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux fonctions propositionnelles sur un même ensemble $E \neq \emptyset$.

(a) $(\forall x \in E) (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E) P(x)) \wedge ((\forall x \in E) Q(x))$

(b) $(\exists x \in E) (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E) P(x)) \vee ((\exists x \in E) Q(x))$

Remarque

Attention : les implications suivantes ne sont pas des équivalences.

$$(\forall x \in E) (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv ((\forall x \in E) P(x)) \vee ((\forall x \in E) Q(x))$$

$$(\exists x \in E) (P(x) \wedge Q(x)) \not\equiv ((\exists x \in E) P(x)) \wedge ((\exists x \in E) Q(x))$$

Contre-exemple. Sur $E = \mathbb{R}$, posons $P(x) : « x \geq 0 »$ et $Q(x) : « x \leq 0 »$. Alors $(\forall x \in \mathbb{R}) (P(x) \vee Q(x))$ est vraie (tout réel est ≥ 0 ou ≤ 0), mais aucune des deux propositions $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x)$, $(\forall x \in \mathbb{R}) Q(x)$ n'est vraie individuellement.

Application

1. Démontrer la propriété (d) (négation de l'équivalence) par table de vérité.
2. Montrer que $\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}$ sans utiliser de table de vérité, mais en utilisant la forme disjonctive et les lois de De Morgan.
3. Simplifier $\overline{((\forall x \in \mathbb{R}) x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1)}$.

4. Lois logiques (tautologies)

4.1 Définition

Définition

Définition 4.1 — On appelle **loi logique** (ou **tautologie**) toute proposition composée à partir de propositions élémentaires $P, Q, R, \dots$ et de connecteurs logiques, qui prend la *valeur de vérité* V quelle que soit la valeur de vérité de chaque proposition élémentaire.

Méthode

Pour montrer qu'une proposition est une loi logique, il suffit de dresser sa table de vérité et de vérifier qu'elle ne contient que des V dans la colonne finale.

4.2 Lois logiques fondamentales

Théorème

Théorème 4.1 — Les propositions suivantes sont des lois logiques :

- (L₁) $P \vee \overline{P}$ (*principe du tiers exclu*)
- (L₂) $\overline{(P \wedge \overline{P})}$ (*principe de non-contradiction*)
- (L₃) $\overline{(\overline{P})} \Leftrightarrow P$ (*double négation*)
- (L₄) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ (*contraposition*)
- (L₅) $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (*transitivité de l'implication*)
- (L₆) $[(P \Rightarrow Q) \wedge P] \Rightarrow Q$ (*modus ponens*)
- (L₇) $[(P \Rightarrow Q) \wedge \overline{Q}] \Rightarrow \overline{P}$ (*modus tollens*)

Démonstration

Loi de contraposition (L₄). Table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

La dernière colonne contient uniquement V, donc l'équivalence est une loi logique. □

Transitivité (L₅). Posons $A = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ et $B = P \Rightarrow R$.

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	A	$B = P \Rightarrow R$	$A \Rightarrow B$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Colonne finale uniformément V. □

Exemple

Exemple 4.1 — Montrer que la proposition $[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$ est une loi logique.

Solution.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	équiv.
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

La colonne d'équivalence est uniformément V, donc l'équivalence est une loi logique. $\square$

Application

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

1. $P \Rightarrow (P \vee Q)$
2. $(P \wedge Q) \Rightarrow P$
3. $[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)] \Rightarrow [P \Rightarrow (Q \wedge R)]$
4. $[(P \vee Q) \wedge \overline{P}] \Rightarrow Q$ (syllogisme disjonctif)

5. Raisonnements mathématiques

Une démonstration mathématique consiste à établir la véracité d'une proposition à partir d'axiomes, de définitions et de théorèmes déjà prouvés. On utilise plusieurs *types de raisonnement* selon la structure de l'énoncé.

5.1 Raisonnement par contre-exemple

Méthode

Pour montrer qu'une proposition de la forme $(\forall x \in E) P(x)$ est *fausse*, il suffit de trouver un seul élément $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ soit fausse. On parle de **raisonnement par contre-exemple.**

Exemple

Exemple 5.1 — Déterminer la valeur de vérité de :

- (a) $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 + x - 2 = 0$
- (b) $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) 3x + 5y = 8$
- (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x + y = xy$

Solution.

- (a) **Fausse.** Contre-exemple : $x_0 = 0$; alors $0^2 + 0 - 2 = -2 \neq 0$.
- (b) **Fausse.** Contre-exemple : $(x_0, y_0) = (0, 0)$; alors $3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 \neq 8$.
- (c) Étudions : pour $x = 1$, l'équation $1 + y = y$ s'écrit $1 = 0$, sans solution. **Fausse** (contre-exemple : $x_0 = 1$).

5.2 Raisonnement déductif (direct)

Méthode

Pour démontrer une implication $P \Rightarrow Q$ par raisonnement déductif :

1. **Méthode des implications successives** : on construit une chaîne $P \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow Q$ à l'aide de propriétés et théorèmes connus.
2. **Méthode hypothèse-conclusion** : on *suppose* P vraie, puis on démontre Q par déduction.

Justification : la loi logique $[(P \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow Q)] \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ (transitivité).

Exemple

Exemple 5.2 — Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) |x| \leq 2 \Rightarrow |3x + 1| \leq 7$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $|x| \leq 2$.

Alors $|3x| = 3|x| \leq 3 \cdot 2 = 6$.

Par l'inégalité triangulaire : $|3x + 1| \leq |3x| + |1| \leq 6 + 1 = 7$.

Donc $|3x + 1| \leq 7$. □

Exemple

Exemple 5.3 — Montrer que : $(\forall a > 0) a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Démonstration. Soit $a > 0$. Étudions la différence :

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a}$$

Or $(a-1)^2 \geq 0$ et $a > 0$, donc $\frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$, c'est-à-dire $a + \frac{1}{a} \geq 2$. □

Remarque. L'égalité a lieu ssi $a = 1$.

5.3 Raisonnement par contraposée**Méthode**

Pour montrer une implication $P \Rightarrow Q$ par contraposée, on prouve l'implication équivalente $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Justification : loi de contraposition $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

Exemple

Exemple 5.4 — (**Démonstration canonique**). Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.

Démonstration par contraposée. L'implication contraposée est :

$$n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair.}$$

Supposons donc n impair. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. On calcule :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Posons $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$: alors $n^2 = 2k' + 1$ est impair.

Ainsi n impair $\Rightarrow n^2$ impair, ce qui équivaut à n^2 pair $\Rightarrow n$ pair. □

Exemple

Exemple 5.5 — Soient a, b deux réels tels que $a \neq -b$. Montrer par contraposée que :

$$\frac{a-b}{a+b} \neq -3 \Rightarrow b \neq -2a.$$

Démonstration par contraposée. L'implication contraposée est :

$$b = -2a \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = -3.$$

Supposons donc $b = -2a$. L'hypothèse $a \neq -b$ s'écrit alors $a \neq 2a$, soit $a \neq 0$. On peut donc substituer :

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{a-(-2a)}{a+(-2a)} = \frac{3a}{-a} = -3 \quad (\text{division licite car } a \neq 0).$$

On obtient bien $\frac{a-b}{a+b} = -3$. □

Exemple

Exemple 5.6 — Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer par contraposée que :

$$a^2 + 1 \text{ pair} \Rightarrow a \text{ impair.}$$

Démonstration. Contraposée : $a \text{ pair} \Rightarrow a^2 + 1 \text{ impair.}$

Supposons a pair. Alors $a = 2k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Donc

$$a^2 + 1 = 4k^2 + 1 = 2 \cdot (2k^2) + 1,$$

qui est impair. □

Remarque

Ne pas confondre :

- La **négation** de $P \Rightarrow Q$ est : $P \wedge \overline{Q}$.
- La **réciproque** de $P \Rightarrow Q$ est : $Q \Rightarrow P$.
- La **contraposée** de $P \Rightarrow Q$ est : $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ ($\Leftrightarrow P \Rightarrow Q$).

5.4 Raisonnement par équivalences successives**Méthode**

Pour démontrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$, deux approches :

1. **Équivalences successives** : construire une chaîne $P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$ à l'aide de propriétés conservant l'équivalence (manipulations algébriques réversibles).
2. **Double implication** : démontrer séparément $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. C'est la méthode à privilégier quand certaines étapes ne sont pas réversibles, par exemple un passage au carré ou une mise à l'exponentielle.

Exemple

Exemple 5.7 — Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ l'inéquation $\frac{x-1}{x+1} \leq 2$, et exprimer son ensemble de solutions comme équivalence logique.

Solution. On distingue les signes de $x+1$.

Cas 1 : $x > -1$ (**donc** $x+1 > 0$). Alors

$$\frac{x-1}{x+1} \leq 2 \Leftrightarrow x-1 \leq 2(x+1) \Leftrightarrow x-1 \leq 2x+2 \Leftrightarrow x \geq -3.$$

Combiné à $x > -1$, cela donne $x > -1$ (car tout $x > -1$ satisfait $x > -3$).

Cas 2 : $x < -1$ (**donc** $x+1 < 0$). L'inégalité est renversée :

$$\frac{x-1}{x+1} \leq 2 \Leftrightarrow x-1 \geq 2(x+1) \Leftrightarrow x \leq -3.$$

Combiné à $x < -1$, cela donne $x \leq -3$.

Synthèse : l'ensemble des solutions est $] -\infty; -3] \cup] -1; +\infty[$. Autrement dit :

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \quad \frac{x-1}{x+1} \leq 2 \Leftrightarrow (x \leq -3 \text{ ou } x > -1).$$

5.5 Raisonnement par disjonction des cas

Méthode

Pour montrer une proposition de la forme $(\forall x \in E) P(x)$ par disjonction des cas, on partage E en sous-ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$ recouvrant E , et l'on démontre $P(x)$ *séparément* sur chaque sous-ensemble.

Justification : loi $[(R \Rightarrow P) \wedge (Q \Rightarrow P)] \Rightarrow [(R \vee Q) \Rightarrow P]$.

Exemple

Exemple 5.8 — (Démonstration canonique). Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) n(n+1)$ est pair.

Démonstration par disjonction des cas. Soit $n \in \mathbb{N}$. On distingue deux cas.

Cas 1 : n est pair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors $n(n+1) = 2k(n+1) = 2 \cdot [k(n+1)]$, qui est pair.

Cas 2 : n est impair. Alors $n+1$ est pair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2k$. Donc $n(n+1) = n \cdot 2k = 2 \cdot (nk)$, qui est pair.

Dans les deux cas, $n(n+1)$ est pair. □

Exemple

Exemple 5.9 — Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 - x + 1 \geq |x - 1|$.

Solution. On distingue selon le signe de $x - 1$.

Cas 1 : $x \geq 1$. Alors $|x - 1| = x - 1$ et l'inégalité demandée devient

$$x^2 - x + 1 \geq x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 1 \geq 0.$$

Cette dernière est vraie car un carré est positif et $(x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Cas 2 : $x < 1$. Alors $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$ et l'inégalité devient

$$x^2 - x + 1 \geq 1 - x \Leftrightarrow x^2 \geq 0.$$

C'est vrai. □

5.6 Raisonnement par l'absurde

Méthode

Pour montrer une proposition P par l'absurde, on suppose $\bar{P}$ vraie et on cherche à aboutir à une contradiction. La contradiction prouve $\bar{P}$ fausse, donc P vraie.

Justification : loi $[(\bar{P} \Rightarrow R) \wedge (\bar{P} \Rightarrow \bar{R})] \Rightarrow P$.

Exemple

(Démonstration canonique : irrationalité de $\sqrt{2}$). **Exemple 5.10 —** Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration par l'absurde. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe deux entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \text{avec} \quad \text{pgcd}(a, b) = 1 \quad (\text{fraction irréductible}).$$

En élevant au carré : $2 = \frac{a^2}{b^2}$, donc

$$a^2 = 2b^2. \quad (\star)$$

De $(\star)$, a^2 est pair. D'après la propriété n^2 pair $\Rightarrow n$ pair (déjà démontrée par contraposée sur $\mathbb{N}$, et qui s'étend immédiatement à $\mathbb{Z}$: si $a \in \mathbb{Z}$ est impair, on écrit $a = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et $a^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair), a est pair. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$.

En substituant dans $(\star)$: $(2k)^2 = 2b^2$, soit $4k^2 = 2b^2$, donc $b^2 = 2k^2$.

Ainsi b^2 est pair, donc b est pair (par la même propriété, appliquée dans $\mathbb{N}$).

Conclusion : a et b sont tous deux pairs, donc $2 \mid a$ et $2 \mid b$. Donc $\text{pgcd}(a, b) \geq 2$, ce qui contredit l'hypothèse $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

L'absurdité prouve que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Exemple

Exemple 5.11 — Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A_n = \frac{n+3}{n+1}$. Montrer que $A_n \neq 1$.

Démonstration par l'absurde. Supposons $A_n = 1$. Alors $\frac{n+3}{n+1} = 1$, soit $n+3 = n+1$, d'où $3 = 1$. Contradiction. □

Exemple

Exemple 5.12 — Soit ABC un triangle et $a > 0$ tels que $BC = 3a$, $CA = 2a$ et $AB = 4a$. Montrer que ABC n'est pas rectangle.

Démonstration par l'absurde. Supposons ABC rectangle. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté le plus long ; ici, le côté le plus long est $AB = 4a$ (car $4a > 3a > 2a$). L'angle droit est donc nécessairement au sommet opposé à AB , c'est-à-dire en C .

D'après le théorème de Pythagore, ABC rectangle en C entraîne $AB^2 = BC^2 + CA^2$, soit

$$(4a)^2 = (3a)^2 + (2a)^2 \Leftrightarrow 16a^2 = 9a^2 + 4a^2 = 13a^2.$$

Comme $a > 0$, $a^2 > 0$, on peut diviser par a^2 : on obtient $16 = 13$, contradiction. □

5.7 Notations Σ et Π

Définition

Définition 5.1 — Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $m, p \in \mathbb{N}$ avec $m \leq p$.

- La **somme** indexée par k allant de m à p se note :

$$\sum_{k=m}^p a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_p.$$

- Le **produit** indexé par k allant de m à p se note :

$$\prod_{k=m}^p a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdots a_p.$$

Propriété

Propriété 5.1 — Soient $(a_k), (b_k)$ deux suites réelles, $m, p \in \mathbb{N}$ avec $m \leq p$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=m}^p (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=m}^p b_k \quad ; \quad \sum_{k=m}^p \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^p a_k \quad ; \quad \sum_{k=m}^p \lambda = (p - m + 1) \lambda.$$

$$\prod_{k=m}^p (a_k \cdot b_k) = \left(\prod_{k=m}^p a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=m}^p b_k \right) ; \quad \prod_{k=m}^p \lambda = \lambda^{p-m+1}.$$

Exemple

Exemple 5.13 — Avec cette notation :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} ; \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2.$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \prod_{k=1}^n k = n! ; \quad \prod_{k=1}^n 2 = 2^n.$$

5.8 Raisonnement par récurrence

C'est le *pilier* de la démonstration en $\mathbb{N}$.

Théorème

(Principe de récurrence). Théorème 5.1 — Soient $P(n)$ une fonction propositionnelle sur $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si :

(1) $P(n_0)$ est vraie (*initialisation*) ;

(2) $\forall n \geq n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (*hérédité*) ;

alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Méthode

Schéma d'une démonstration par récurrence sur $P(n)$, à partir de n_0 :

1. **Initialisation.** Vérifier que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité.** Soit $n \geq n_0$. Supposer $P(n)$ vraie (hypothèse de récurrence, abrégée **HR**). Démontrer alors $P(n+1)$.
3. **Conclusion.** D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple

(Récurrence canonique : somme des n premiers entiers). Exemple 5.14 — Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration par récurrence. Posons $P(n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation ($n = 1$). Membre de gauche : 1. Membre de droite : $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (**HR**).

Montrons $P(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=1}^n k}_{\text{HR}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left[\frac{n}{2} + 1 \right] = (n+1) \cdot \frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

Exemple

(Somme des carrés). Exemple 5.15 — Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration. Posons $P(n) : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Init ($n = 1$). À gauche : $1^2 = 1$. À droite : $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. OK.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &\stackrel{\text{HR}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)}{6} [n(2n+1) + 6(n+1)] \\ &= \frac{(n+1)}{6} [2n^2 + n + 6n + 6] \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad (\text{factorisation : } 2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)) \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

Exemple

(Inégalité de Bernoulli). Exemple 5.16 — Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a > -1$. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) (1+a)^n \geq 1+na$.

Démonstration. Posons $P(n) : (1+a)^n \geq 1+na$.

Init ($n = 0$). À gauche : $(1+a)^0 = 1$. À droite : $1 + 0 \cdot a = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n) : (1+a)^n \geq 1+na$ **(HR)**.

Comme $a > -1$, on a $1+a > 0$; on peut donc multiplier l'inégalité par $1+a$ sans en changer le sens :

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \stackrel{\text{HR}}{\geq} (1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2.$$

Comme $n \geq 0$ et $a^2 \geq 0$, $na^2 \geq 0$, donc

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Exemple

(Inégalité exponentielle). Exemple 5.17 — Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 2^n \geq n+1$.

Démonstration. Posons $P(n) : 2^n \geq n+1$.

Init ($n=0$). $2^0 = 1 \geq 1 = 0+1$. OK.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n) : 2^n \geq n+1$ (**HR**).

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \stackrel{\text{HR}}{\geq} 2(n+1) = 2n+2 \geq (n+1)+1 \quad \text{car } n \geq 0.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $2^n \geq n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

6. Synthèse

6.1 Tableau récapitulatif des opérations logiques

Connecteur	Lecture	Négation
$\overline{P}$	non P	$\overline{P}$
$P \wedge Q$	P et Q	$\overline{P \vee Q}$
$P \vee Q$	P ou Q	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
$P \Rightarrow Q$	si P alors Q	$P \wedge \overline{Q}$
$P \Leftrightarrow Q$	P ssi Q	$(P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$
$(\forall x \in E) P(x)$	pour tout x , $P(x)$	$(\exists x \in E) \overline{P(x)}$
$(\exists x \in E) P(x)$	il existe x , $P(x)$	$(\forall x \in E) \overline{P(x)}$

6.2 Stratégie de choix du type de raisonnement

Forme de l'énoncé	Raisonnement à privilégier
$(\forall x \in E) P(x)$ est <i>vraie</i>	Raisonnement direct (déductif) sur un x quelconque de E .
$(\forall x \in E) P(x)$ est <i>fausse</i>	Contre-exemple.
$P \Rightarrow Q$ avec Q "compliqué"	Direct si on voit la chaîne, sinon <i>contraposée</i> : on part de $\overline{Q}$.
$P \Leftrightarrow Q$ avec étapes réversibles	Équivalences successives.
$P \Leftrightarrow Q$ avec étapes <i>non</i> réversibles (carré, exp...)	Double implication.
$(\forall x \in E) P(x)$ avec E partitionnable	Disjonction des cas.
Énoncé du type " $x \notin E$ " ou " $x \neq y$ "	Absurde.
$(\forall n \in \mathbb{N}) P(n)$	Récurrence.

6.3 Pièges classiques à éviter

Remarque

1. **Confondre $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.** Une implication n'est *pas* commutative. Ex.: « si $x=2$ alors $x^2=4$ » est vraie, mais « si $x^2=4$ alors $x=2$ » est fausse ($x=-2$).
2. **Confondre négation et contraposée.** La négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \overline{Q}$, *pas* $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$.

3. **Permuter $\forall$ et $\exists$.** Voir l'exemple du numéro de téléphone : $(\forall x)(\exists y) \neq (\exists y)(\forall x)$.
4. **Récurrence sans initialisation.** La proposition « $n = n + 1$ » se transmet héréditairement ($P(n) \Rightarrow P(n + 1)$) mais n'est jamais vraie : l'initialisation est cruciale.
5. **Contre-exemple pour démontrer une affirmation universelle.** Un seul exemple ne prouve pas $(\forall x) P(x)$: il ne sert qu'à la *réfuter*.
6. **Élever au carré sans précaution.** L'implication $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ est vraie, mais pas la réciproque. Quand on passe au carré dans une équivalence, il faut justifier la réversibilité (signes des deux membres).

Fin du chapitre 1 – Notions de Logique