

Série d'exercices — Chapitre 6 : Nombres complexes

2^e BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1 — Forme algébrique

Mettre sous forme algébrique :

1. $z_1 = \frac{3+6i}{3-4i}$

3. $z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$

5. $z_5 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

2. $z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$

4. $z_4 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

6. $z_6 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$

Exercice 2 — Partie réelle, partie imaginaire et lieux géométriques

Soit $z \neq 1$ et $Z = \frac{z-2i}{z-1}$ avec $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

1. Déterminer $\operatorname{Re}(Z)$ et $\operatorname{Im}(Z)$ en fonction de x et y .
2. Déterminer l'ensemble (D) des points $M(z)$ tels que $Z \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que $Z \in i\mathbb{R}$.

Exercice 3 — Lieux géométriques

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant chaque condition :

1. $|z+1+i| = 2$

4. $\left|\frac{z-2i}{z+i}\right| = 2$

2. $|z-2i| = |z+i|$

5. $|(1+i)z-2i| = 2$

3. $\frac{1-z}{1-iz} \in \mathbb{R}$

6. $|z-1-i| \leq 3$

Exercice 4 — Forme trigonométrique

Donner la forme trigonométrique de chaque nombre :

1. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

3. $z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$

5. $z_5 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$

2. $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4. $z_4 = (1-i)(-\sqrt{3}+i)$

6. $z_6 = (1+i)^5$

Exercice 5 — Forme trigonométrique avec paramètre

Pour $\theta \in]-\pi; \pi]$, mettre sous forme trigonométrique :

1. $z = \sin \theta + i \cos \theta$

3. $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$ (factoriser $e^{i\theta/2}$)

2. $z = -\cos \theta + i \sin \theta$

4. $z = \frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta}$ (pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$)

Exercice 6 — Équations et systèmes dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $(2-i)z + i = 0$

5. $\begin{cases} z + \bar{z} = 2 \\ 2z - \bar{z} = 1 + i \end{cases}$

2. $\frac{z+1}{z-1} = 2i$

6. $z^2 + 4z + 29 = 0$

3. $z + 2\bar{z} = 6 + i$

4. $z = (1+i)\bar{z} + 3 - 2i$

Exercice 7 — Calcul de $\cos(5\pi/12)$ et $\sin(5\pi/12)$

Soit $Z = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

1. Déterminer le module et un argument de $1+i$ et de $\sqrt{3}-i$.
2. Écrire Z sous forme algébrique (en multipliant par le conjugué).
3. Écrire Z sous forme trigonométrique.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 8 — Module 1 et propriétés d'inversion

1. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1| = |z_2| = 1$ et $1 + z_1 z_2 \neq 0$. Démontrer que $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$. Démontrer l'équivalence :

$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

3. Soit $p(z) = \frac{5z}{z^2 + 1}$ pour $z \neq \pm i$. Montrer que $p(z) \in \mathbb{R}$ ssi $(z - \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$. En déduire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $p(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 — Équation 3^e degré et géométrie

Partie A. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $8z^3 + 1 = 0$.

1. Vérifier que $8z^3 + 1 = (2z + 1)(4z^2 - 2z + 1)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ et donner les trois solutions sous formes algébrique et exponentielle.

Partie B. Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ d'affixes :

$$a = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad b = -\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}, \quad c = -\frac{1}{2}.$$

1. Écrire a sous forme exponentielle. En déduire $|a|$ et $\arg(a)$.
2. Vérifier que $a^2 = b$ et en déduire un argument de b .
3. Montrer que $\frac{b-a}{b} = i\sqrt{3}$ et en déduire que le triangle OAB est rectangle en B .
4. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Donner son écriture complexe et vérifier que $C = R(A)$.
5. Montrer que B est le milieu de $[AC]$.

Exercice 10 — Synthèse : équation + rotation + valeur exacte

Partie A. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$.

Partie B. Soient $a = 2(\sqrt{3} + i)$, $b = 1 + i$, $c = 2\sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})$.

1. Écrire a , b , c et $\frac{b}{c}$ sous forme exponentielle.
2. Montrer que a^{15} est imaginaire pur.
3. Démontrer que $\frac{ab}{c} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
4. Écrire $\frac{ab}{c}$ sous forme algébrique.

5. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
6. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$. Trouver l'affixe de $P = R(B)$ et montrer que O , A , P sont alignés.