

Exercicen°1

Comparer les deux nombres suivants :
(a) $\sqrt{5} + 1$ et 3
(b) $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ et $\sqrt{12}$
(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{\sqrt{2}}{3}$
(d) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$

Exercicen°2

Soient a et b deux réels tels que $a \geq b$.
1. Montrer que $\frac{a+b}{2} \geq b$.
2. Montrer que $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
3. On suppose de plus $a \geq 0$ et $b \geq 0$. En déduire que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Exercicen°3

Soient $x \in [1; 3]$ et $y \in [-2; 0]$. Encadrer :
$$A = x + y, \quad B = x - y, \quad C = xy,$$
$$D = 2x - 3y, \quad E = x^2 + y^2.$$

Exercicen°4

Calculer la valeur absolue de chacun des nombres suivants :
 $|3 - 7|, \quad |\sqrt{5} - 2|, \quad |\pi - 3|, \quad |1 - \sqrt{2}|, \quad |2 - \sqrt{5}|.$

Exercicen°5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(a) $|x - 3| = 5$
(b) $|2x + 1| = 4$
(c) $|x + 2| = |3x - 4|$
(d) $|x - 1| = -2$

Exercicen°6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
(a) $|x - 1| < 3$
(b) $|2x + 3| \geq 5$
(c) $|x| + |x - 2| \leq 4$
(d) $|x + 1| \leq 2|x - 3|$

Exercicen°7

Sachant que $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$ et $1,732 \leq \sqrt{3} \leq 1,733$:
1. Donner un encadrement de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
2. Donner un encadrement de $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$.
3. En déduire un encadrement de $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{6}}$.

Exercicen°8

Calculer la partie entière de chacun des nombres suivants :
$$E(7,3), \quad E(-2,1), \quad E(\sqrt{5}), \quad E(-\pi), \quad E\left(\frac{17}{3}\right).$$

Exercicen°9

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $a + \frac{1}{a} \geq 2$.
(Indication : étudier le signe de $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$.)

Exercicen°10

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer l'inégalité triangulaire : $|a + b| \leq |a| + |b|$.
(Indication : élever au carré et utiliser $|a||b| \geq ab$.)