

Table des matières

1	Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$	1	3	Intervalles de $\mathbb{R}$	2
2	Compatibilité de l'ordre avec les opérations	1	4	Valeur absolue	3
			5	Encadrement et approximation	4
			5.1	Valeur approchée	4
			5.2	Partie entière	5

1 Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

DÉFINITION

Pour tous réels a et b :

- $a \leq b$ signifie que $b - a \geq 0$.
- $a < b$ signifie que $b - a > 0$.
- $a \geq b$ signifie que $a - b \geq 0$.
- $a > b$ signifie que $a - b > 0$.

PROPRIÉTÉ 1

Propriétés de la relation $\leq$:

- **Réflexivité** : $a \leq a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- **Antisymétrie** : si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$.
- **Transitivité** : si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.

EXEMPLE

Comparer $a = \frac{3}{7}$ et $b = \frac{5}{11}$ en étudiant le signe de $b - a$.

EXERCICE

Soient x et y deux réels tels que $x \leq y$.

- 1 Montrer que $x \leq \frac{x+y}{2} \leq y$.
- 2 En déduire qu'entre deux réels distincts il existe toujours un troisième réel.

2 Compatibilité de l'ordre avec les opérations

PROPRIÉTÉ 2

Pour tous réels a, b, c, d :

- $a \leq b \iff a + c \leq b + c$ (compatibilité avec l'addition).
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
- Si $a \leq b$ et $c \geq 0$, alors $ac \leq bc$.
- Si $a \leq b$ et $c \leq 0$, alors $ac \geq bc$ (le sens change).
- Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $0 \leq ac \leq bd$.

PROPRIÉTÉ

Passage à l'inverse :

- Si $0 < a \leq b$, alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.
- Si $a \leq b < 0$, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$.

PROPRIÉTÉ

Passage au carré :

- Si $0 \leq a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$.
- Si $a \leq b \leq 0$, alors $a^2 \geq b^2$.

PROPRIÉTÉ

Passage à la racine carrée : si $0 \leq a \leq b$, alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

EXEMPLE

Comparer $\sqrt{3} + 1$ et $\sqrt{5}$ en utilisant le fait que ces nombres sont positifs.

EXERCICE

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

- 1 Comparer a^3 et b^3 dans le cas où $0 \leq a < b$.
- 2 Comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ dans le cas où $a < b < 0$.
- 3 Les inégalités $a < b$ et $a^2 < b^2$ sont-elles équivalentes ? Donner un contre-exemple.

3 Intervalles de $\mathbb{R}$

DÉFINITION 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. On définit les **intervalles** suivants :

Notation	Définition	Représentation
$[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	intervalle <i>fermé</i>
$]a; b[$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	intervalle <i>ouvert</i>
$[a; b[$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	semi-ouvert à droite
$]a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	semi-ouvert à gauche
$[a; +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	demi-droite fermée
$]a; +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	demi-droite ouverte
$] -\infty; a]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$	demi-droite fermée
$] -\infty; a[$	$\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$	demi-droite ouverte
$] -\infty; +\infty[$	$\mathbb{R}$	droite réelle

DÉFINITION

Opérations sur les intervalles.

- L'**intersection** $I \cap J$ est l'ensemble des éléments appartenant à I et à J .
- La **réunion** $I \cup J$ est l'ensemble des éléments appartenant à I ou à J .

EXEMPLE

Déterminer $[1; 5] \cap [3; 7]$, $[1; 5] \cup [3; 7]$ et $] -\infty; 2] \cap [5; +\infty[$.

EXERCICE

On pose $I = [-3; 4[$ et $J =]1; 6]$.

- 1 Déterminer $I \cap J$.
- 2 Déterminer $I \cup J$.
- 3 Déterminer $\mathbb{R} \setminus I$.

4 Valeur absolue

DÉFINITION 2

Pour tout réel x , la **valeur absolue** de x , notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

EXEMPLE

Calculer $|5|$, $|-3|$, $|\sqrt{2} - 1|$ et $|2 - \sqrt{5}|$.

PROPRIÉTÉ 3

Pour tous réels x, y :

- $|x| \geq 0$, et $|x| = 0 \iff x = 0$.
- $|-x| = |x|$.
- $|x| = \sqrt{x^2}$.
- $|xy| = |x| \cdot |y|$.
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ (si $y \neq 0$).
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ (**inégalité triangulaire**).

DÉFINITION

Distance entre deux réels. Pour tous réels a et b , la *distance* entre a et b est :

$$d(a, b) = |b - a| = |a - b|.$$

PROPRIÉTÉ 4

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Alors :

- $|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r \iff x \in [a - r; a + r]$.
- $|x - a| < r \iff x \in]a - r; a + r[$.
- $|x - a| \geq r \iff x \leq a - r \text{ ou } x \geq a + r, \text{ i.e. } x \in]-\infty; a - r] \cup [a + r; +\infty[$.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x - 3| \leq 5$.

EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- 1 $|x - 3| = 5$;
- 2 $|2x + 1| \leq 7$;
- 3 $|x - 1| > 2$.

5 Encadrement et approximation

DÉFINITION

Encadrer un réel x , c'est trouver deux réels a et b tels que $a \leq x \leq b$.

La différence $b - a$ est appelée l'**amplitude** de l'encadrement. La précision d'une valeur approchée désigne, elle, une borne sur l'erreur.

EXEMPLE

Donner l'amplitude de l'encadrement $1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$.

5.1 Valeur approchée

DÉFINITION

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est une **valeur approchée** de x à la précision $\varepsilon > 0$ près si :

$$|x - a| \leq \varepsilon, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon.$$

- Si $a \leq x$, on dit que a est une valeur approchée *par défaut*.
- Si $a \geq x$, on dit que a est une valeur approchée *par excès*.

EXEMPLE

Donner une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près, puis une valeur approchée par défaut de π à 10^{-2} près.

5.2 Partie entière

DÉFINITION 3

La **partie entière** d'un réel x , notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$n \leq x < n + 1.$$

EXEMPLE

Déterminer $E(3,7)$, $E(5)$, $E(-2,3)$ et $E(\pi)$.

EXERCICE

On donne l'encadrement $3,141 \leq \pi \leq 3,142$.

- 1 Donner un encadrement de 2π , puis de π^2 .
- 2 Préciser l'amplitude de chacun de ces deux encadrements.
- 3 Le nombre 3,141 est-il une valeur approchée de π à 10^{-3} près ? Est-elle par défaut ou par excès ?

EXERCICE

- 1 Déterminer $E(x)$ pour $x = 4,9$, puis pour $x = -4,9$, puis pour $x = \frac{22}{7}$.
- 2 Justifier que, pour tout réel x , $E(x) \leq x < E(x) + 1$.
- 3 En déduire un encadrement du réel $x - E(x)$.

EXERCICE

Soit $x \in [2; 5]$. Encadrer les expressions suivantes :

$$A = 3x - 1, \quad B = -2x + 4, \quad C = x^2, \quad D = \frac{1}{x}.$$