

Table des matières

1	Définition et vocabulaire	1	3	Opérations sur les polynômes	2
2	Égalité de deux polynômes	1	4	Division euclidienne par $x - \alpha$	3
			4.1	Théorème de la division	3
			4.2	Méthode de Horner	3
			5	Racine d'un polynôme et factorisation	3

1 Définition et vocabulaire

DÉFINITION 1

On appelle **polynôme** (ou *fonction polynomiale*) toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels appelés **coefficients** de P .

Le terme $a_k x^k$ est appelé *terme de degré k* et a_k *coefficient du terme de degré k* .

DÉFINITION

- Le polynôme P tel que tous les coefficients sont nuls est appelé **polynôme nul**, noté 0.
- Si $a_n \neq 0$, l'entier n est appelé le **degré** de P , et l'on note $\text{d}^\circ P = n$.
- Le coefficient a_n (correspondant au plus haut degré) est appelé **coefficient dominant**.
- Le polynôme nul *n'a pas de degré* (par convention).

EXEMPLE

Donner le degré et le coefficient dominant de $P(x) = 2x^3 - 5x + 1$, $Q(x) = -4x^2 + x$, $R(x) = 7$ et $S(x) = 0$.

EXERCICE

On donne $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ et $Q(x) = -x^3 + x$.

- 1 Donner le degré et le coefficient dominant de P , puis de Q .
- 2 Calculer $P(1)$ et $Q(-1)$.
- 3 Le nombre 0 est-il une racine de Q ?

2 Égalité de deux polynômes

THÉORÈME 1

Soient P et Q deux polynômes. Alors $P = Q$ si et seulement si les coefficients de chaque puissance de x sont égaux deux à deux, en complétant au besoin par des coefficients nuls. En particulier, si P et Q sont non nuls et égaux, alors $\text{d}^\circ P = \text{d}^\circ Q$.

REMARQUE

Méthode d'identification : si $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut identifier les coefficients de chaque puissance de x .

EXEMPLE

Déterminer a, b, c tels que $a(x^2 + 1) + b(x - 1) + c = 2x^2 - x + 3$ pour tout réel x .

EXERCICE

On pose $P(x) = (a - 1)x^2 + 3x + b$ et $Q(x) = 2x^2 + cx - 5$, où a, b et c sont des réels.

- 1 Traduire l'égalité $P = Q$ par un système de conditions sur a, b et c .
- 2 En déduire les valeurs de a, b et c .

3 Opérations sur les polynômes

DÉFINITION

Soient P et Q deux polynômes non nuls.

- La **somme** $P + Q$ est obtenue en additionnant les coefficients des termes de même degré.
- Le **produit** $P \times Q$ est obtenu en développant.

PROPRIÉTÉ 1

Soient P et Q deux polynômes non nuls.

- $d^\circ(P + Q) \leq \max(d^\circ P, d^\circ Q)$.
- $d^\circ(P \times Q) = d^\circ P + d^\circ Q$.

EXEMPLE

Pour $P(x) = 2x^2 - x + 3$ et $Q(x) = x^3 + x - 1$, calculer $P + Q$ et PQ , puis prévoir leurs degrés.

EXERCICE

On donne $P(x) = 2x^2 - x + 3$ et $Q(x) = x^2 + 4x - 1$.

- 1 Calculer $P + Q$ et $P - Q$.
- 2 Calculer $P \times Q$.
- 3 Donner le degré de chacun des trois polynômes obtenus.

4 Division euclidienne par $x - \alpha$

4.1 Théorème de la division

THÉORÈME 2

Théorème (division euclidienne par $x - \alpha$).

Soient P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Il existe un *unique* polynôme Q et un *unique* réel r tels que :

$$P(x) = (x - \alpha) Q(x) + r.$$

Q est appelé le **quotient** et r le **reste** de la division.

PROPRIÉTÉ 2

Avec les notations du théorème :

$$r = P(\alpha).$$

EXEMPLE

Effectuer la division euclidienne de $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 3$ par $x - 2$, puis vérifier le reste à l'aide de $P(2)$.

4.2 Méthode de Horner

REMARQUE

Schéma de Horner pour diviser $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ par $x - \alpha$: on dispose les coefficients dans un tableau, et l'on calcule de proche en proche.

À faire : compléter le schéma de Horner de $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 3$ par $x - 2$, puis en déduire le quotient et le reste. Contrôler le reste en calculant $P(2)$.

EXERCICE

Soit $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

- 1 Vérifier que $P(2) = 0$.
- 2 Effectuer la division euclidienne de P par $x - 2$.
- 3 En déduire toutes les racines de P .

5 Racine d'un polynôme et factorisation

DÉFINITION 2

Un réel α est une **racine** (ou un *zéro*) du polynôme P si :

$$P(\alpha) = 0.$$

THÉORÈME 3

Théorème. Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$. Les énoncés suivants sont équivalents :

- 1 α est une racine de P .
- 2 $P(\alpha) = 0$.
- 3 $(x - \alpha)$ divise $P(x)$, c'est-à-dire il existe un polynôme Q tel que :

$$P(x) = (x - \alpha) Q(x).$$

EXEMPLE

Soit $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Vérifier que 1 est une racine, appliquer la méthode de Horner, puis factoriser complètement P .

PROPRIÉTÉ

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines réelles distinctes.

EXERCICE

Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

- 1 Vérifier que -1 est une racine de P .
- 2 Factoriser $P(x)$ par $(x + 1)$.
- 3 Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

EXERCICE

Effectuer la division euclidienne de $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x - 1$ par $D(x) = x - 1$.