

Série d'exercices — Chapitre 4 : Les fonctions primitives

2^e BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1 — Vérification + existence

1. Vérifier que $F(x) = 2\sqrt{x} + 7$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$.
2. Vérifier que $F(x) = (x-1)e^x$ est une primitive de $f(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$ (on admettra que $(e^x)' = e^x$).
3. Justifier que la fonction $f(x) = x\sqrt{x+1} + \cos x$ admet une primitive sur $[-1; +\infty[$.
4. Justifier que la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 — Primitives directes (polynômes et puissances)

Déterminer une primitive de chaque fonction sur un intervalle approprié :

1. $f_1(x) = 2x^5 - 3x^2 - 1$
2. $f_2(x) = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt[4]{x^3}$
3. $f_3(x) = \sqrt{x}(x^2 + 2\sqrt{x})$
4. $f_4(x) = \sqrt{x+2}$
5. $f_5(x) = (2x+1)\sqrt{2x+1}$
6. $f_6(x) = \frac{1}{(2x-5)^3}$

Exercice 3 — Primitives trigonométriques

Déterminer une primitive de chaque fonction sur $\mathbb{R}$:

1. $f_1(x) = \sin(5-2x)$
2. $f_2(x) = \cos(3x-1)$
3. $f_3(x) = 1 + \tan^2(x)$ (sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$)
4. $f_4(x) = \sin x \cos x$ (indication : linéariser)
5. $f_5(x) = \cos^2(x)$
6. $f_6(x) = \sin^3(x)$

Exercice 4 — Forme $u' \cdot u^r$

Déterminer une primitive de chaque fonction :

1. $f_1(x) = (3x^2 - 1)(x^3 - x)^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $f_2(x) = \cos x \cdot \sin^4(x)$ sur $\mathbb{R}$
3. $f_3(x) = \frac{x}{(x^2+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$
4. $f_4(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ sur $\mathbb{R}$
5. $f_5(x) = \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}$ sur $\mathbb{R}$
6. $f_6(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 — Primitive avec condition initiale

1. Soit $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 8x - 7$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(1) = 0$.
2. Soit $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$. Déterminer toutes les primitives de g , puis trouver celle qui s'annule en $x = 1$.
3. Soit $h(x) = \cos(2x) + \sin(x)$. Déterminer la primitive H telle que $H(0) = 1$.

Exercice 6 — Décomposition polynomiale

Soit $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1}$ sur $]1; +\infty[$.

1. Effectuer la division euclidienne et vérifier que $f(x) = x^2 + x - 1 + \frac{0}{x-1}$ (c.-à-d. la division est

exacte).

2. En déduire toutes les primitives de f sur $]1; +\infty[$.
3. Déterminer la primitive F qui vérifie $F(2) = 0$.

Exercice 7 — Primitives par réécriture

Pour chaque fonction, réécrire sous une forme reconnaissable et déterminer une primitive :

1. $f_1(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$

2. $f_2(x) = \frac{(x+1)^2}{x^3}$ sur $]0; +\infty[$

3. $f_3(x) = \frac{x^2-1}{x^4}$ sur $]0; +\infty[$

4. $f_4(x) = \cos(x)(1 + \sin x)$

5. $f_5(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

6. $f_6(x) = \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ (*anticipation Ch.5*)

Exercice 8 — Primitive par identification

Soit $F(x) = (ax^2 + bx + c)\cos(x) + (dx^2 + ex + g)\sin(x)$.

1. Calculer $F'(x)$.
2. Déterminer les réels a, b, c, d, e, g pour que F soit une primitive de $f(x) = x^2 \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire une primitive de f .

Exercice 9 — Vrai/Faux et raisonnement

Pour chaque assertion, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant :

1. Si F est une primitive de f sur I , alors $G(x) = F(x) + 5$ est aussi une primitive de f sur I .
2. Si f est continue sur $\mathbb{R}^*$, alors f admet une primitive sur $\mathbb{R}^*$.
3. Si F est une primitive de f sur I , alors F^2 est une primitive de f^2 sur I .
4. Toute fonction polynomiale admet une primitive polynomiale.
5. Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors F est aussi une primitive de f sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 10 — Synthèse : étude + primitive

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et calculer ses limites en $\pm\infty$.
2. Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$ (*indication : forme $\frac{u'}{u^2}$*).
3. Soit F la primitive de f telle que $F(0) = 1$. Donner l'expression de $F(x)$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.