

Table des matières

1	Notion de primitive	2
1.1	Définition	2
1.2	Existence des primitives	2
2	Ensemble des primitives	3
3	Primitives des fonctions usuelles	4
4	Primitives par formules de composition	5

1 Notion de primitive

Activité

Soient f et F deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 5x^3 - 3x + 2 \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x.$$

- 1 Vérifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 2 Soit $G(x) = F(x) - 4$. Montrer que G est aussi une « primitive » de f .
- 3 Que peut-on dire de F et G ?

1.1 Définition

Définition

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que F est une **primitive** de f sur I si :

- F est dérivable sur I .
- Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple

« Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre. »

Montrer que $F : x \mapsto 2\sqrt{x} + 7$ est une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$.

Solution. La fonction F est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme d'une fonction dérivable et d'une constante. Pour tout $x > 0$:

$$F'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x).$$

Donc F est bien une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Application

- 1 Vérifier que $F : x \mapsto x^2 + 2x + 3$ est une primitive de $f : x \mapsto 2x + 2$ sur $\mathbb{R}$.
- 2 Vérifier que $F : x \mapsto 5x + 4$ est une primitive de $f : x \mapsto 5$ sur $\mathbb{R}$.

1.2 Existence des primitives

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I .

Exemple

« Justifier l'existence d'une primitive. »

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x+1} + \cos x$ admet une primitive sur $I = [-1; +\infty[$.

Solution. La fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$; la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur $[-1; +\infty[$; donc $x \mapsto x\sqrt{x+1}$ est continue sur $[-1; +\infty[$. La fonction $x \mapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par somme, f est continue sur $[-1; +\infty[$. D'après la propriété, f admet une primitive sur I .

Application

Justifier que les fonctions suivantes admettent une primitive sur l'intervalle indiqué :

- $f(x) = \sin x + x^2$ sur $\mathbb{R}$.
- $h(x) = \sqrt{x-3}$ sur $[3; +\infty[$.
- $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.
- $k(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

À faire à la maison

- 1 Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ vérifiant $F(0) = 2$. Calculer la dérivée de $G(x) = F(x^2 + 1)$ en $x = 0$.
- 2 Soit $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$. Vérifier que $f(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}$ et utiliser ce résultat pour justifier que f admet une primitive sur $\mathbb{R}$ (vue en chapitre suivant : ne pas calculer cette primitive).
- 3 Pour quelle(s) valeur(s) du réel a la fonction $F(x) = (ax + 1) \cos x + (1 - a) \sin x$ est-elle une primitive de $f(x) = -x \sin x$ sur $\mathbb{R}$?

2 Ensemble des primitives

Propriété

Soit F une primitive d'une fonction f sur un intervalle I .

- L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions $x \mapsto F(x) + c$, où $c \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f sur I vérifiant $G(x_0) = y_0$.

Remarque

La constante $c \in \mathbb{R}$, appelée *constante d'intégration*, ne doit jamais être oubliée. Sans condition initiale, une fonction admet une infinité de primitives.

Exemple

« Déterminer la primitive vérifiant une condition initiale. »

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 8x - 7$. Déterminer la primitive F de f telle que $F(1) = 0$.

Solution. Toute primitive F de f sur $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$F(x) = x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 7x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

La condition $F(1) = 0$ s'écrit :

$$1 - \frac{5}{3} + 4 - 7 + c = 0 \iff -2 - \frac{5}{3} + c = 0 \iff c = \frac{11}{3}.$$

$$\text{Donc } F(x) = x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 7x + \frac{11}{3}.$$

Application

- 1 Déterminer toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5$.
- 2 Déterminer la primitive F de $f(x) = 6x^2 + 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 3$.

À faire à la maison

- 1 Soit $f(x) = (2x + 1)(x - 3)^2$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer toutes les primitives de f , puis trouver celle qui s'annule en $x = 1$.
- 2 Soit $f(x) = \frac{1}{(x + 2)^2}$ sur $] -\infty ; -2[$. Déterminer la primitive F telle que $F(0) = 5$.
- 3 Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et F, G deux primitives de f sur $[a; b]$ telles que $F(a) = 2$, $F(b) = 7$ et $G(a) = -1$. Calculer $G(b)$.

3 Primitives des fonctions usuelles

Propriété

Le tableau ci-dessous donne, pour chaque fonction f , une primitive F . Toutes les autres primitives s'obtiennent en ajoutant une constante $c \in \mathbb{R}$.

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Intervalle
a	ax	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x^r, r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$
$\cos(ax + b), a \neq 0$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax + b), a \neq 0$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$

Exemple

« Lecture directe du tableau. »

Déterminer une primitive de $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} + \cos x$ sur $]0; +\infty[$.

Solution. On somme une primitive de chaque terme :

$$F(x) = x^3 + \frac{1}{x} + \sin x.$$

Application

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur un intervalle approprié :

- $f_1(x) = 2x^5 - 3x^2 - 1$
- $f_2(x) = \sqrt{x}$
- $f_3(x) = \cos(3x - 1)$
- $f_4(x) = \sin(5 - 2x)$
- $f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$
- $f_6(x) = 1 + \tan^2 x$

À faire à la maison

Déterminer une primitive de chaque fonction sur un intervalle approprié :

- $g_1(x) = \cos(2x) - \sin(3x + \pi/4)$
- $g_2(x) = \sin^2(x)$ (linéariser via $\cos(2x)$)
- $g_3(x) = \cos^2(x)$ (linéariser via $\cos(2x)$)
- $g_4(x) = (3x - 1)^4 + (2x + 5)^7$

4 Primitives par formules de composition

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , $r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$. Sur tout intervalle où les expressions ont un sens :

- $u' \cdot u^r$ admet pour primitive $\frac{u^{r+1}}{r+1}$.
- $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ admet pour primitive $2\sqrt{u}$ (sur tout intervalle où $u > 0$).
- $\frac{u'}{u^2}$ admet pour primitive $-\frac{1}{u}$ (sur tout intervalle où $u \neq 0$).
- $u' \cdot v + u \cdot v'$ admet pour primitive $u \cdot v$.
- $\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ admet pour primitive $\frac{u}{v}$ (sur tout intervalle où $v \neq 0$).

Exemple

« Reconnaître la forme $u' \cdot u^r$. »

Déterminer une primitive de $f(x) = (3x^2 - 1)(x^3 - x)^2$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. On pose $u(x) = x^3 - x$, alors $u'(x) = 3x^2 - 1$. On reconnaît $f = u' \cdot u^2$, donc une primitive est :

$$F(x) = \frac{u^3(x)}{3} = \frac{(x^3 - x)^3}{3}.$$

Exemple

« Reconnaître la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$. »

Déterminer une primitive de $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. On pose $u(x) = x^2 + 1 > 0$, alors $u'(x) = 2x$. On reconnaît $f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$, donc une primitive est :

$$F(x) = 2\sqrt{x^2 + 1}.$$

Application

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \cos x \cdot (\sin x)^4$ sur $\mathbb{R}$.
- $f_2(x) = \sqrt{x+2}$ sur $[-2; +\infty[$.
- $f_3(x) = (2x+1)\sqrt{2x+1}$ sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.
- $f_4(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

À faire à la maison

Déterminer une primitive de chaque fonction sur un intervalle approprié :

- $h_1(x) = \frac{x^3}{(x^4 + 1)^3}$

- $h_2(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 5}}$

- $h_3(x) = \sin(x) \cos^3(x)$

- $h_4(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}$

- $h_5(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 4}}$

- $h_6(x) = \tan x \cdot (1 + \tan^2 x)$