

Série d'exercices — Chapitre 11 : Dénombrement, probabilités et variables aléatoires

2^e BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1 — Principe fondamental + arrangements + permutations

- Une porte d'immeuble est commandée par un code : une lettre parmi $\{A, B, C\}$ suivie de trois chiffres parmi $\{1, 2, \dots, 9\}$.
 - Combien de codes peut-on proposer ?
 - Combien de codes commencent par A ?
 - Combien de codes comportent trois chiffres distincts ?
- Une association de 50 membres élit un bureau de 5 personnes (président, vice-président, secrétaire, trésorier, vice-trésorier ; sans cumul). Combien de bureaux possibles ?
- Combien d'anagrammes du mot « MAISON » ? du mot « MISSISSIPPI » ?
- De combien de façons peut-on ranger 10 livres distincts sur une étagère ?

Exercice 2 — Combinaisons et binôme de Newton

- Calculer C_8^4 , C_{10}^3 , C_{49}^6 .
- Une urne contient 3 boules blanches et 5 noires. On tire simultanément 4 boules. Combien de tirages contiennent :
 - exactement 1 blanche ?
 - exactement 2 blanches ?
 - au moins 1 blanche ?
 - 4 noires ?
- À l'aide du binôme de Newton, développer $(2x - 1)^5$ et $(x + y)^6$.
- Démontrer que $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$ (*indication : développer $(1 + 1)^n$*).
- Démontrer la formule de Pascal : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ pour $0 \leq p < n$.

Exercice 3 — Probabilités élémentaires (équiprobabilité)

Un sac contient 4 boules rouges, 3 vertes, 2 blanches. On tire simultanément 3 boules.

- Calculer le nombre total de tirages.
- Calculer la probabilité de chaque événement :

— A : 3 boules rouges	— D : exactement 1 rouge
— B : 3 boules de même couleur	— E : au moins 1 blanche
— C : 3 couleurs distinctes	— F : aucune blanche
- Calculer $P(D \cap E)$ et $P(D \cup E)$.

Exercice 4 — Pièce et dé : événements simples

- On lance une pièce non truquée 3 fois successivement.
 - Donner Ω et son cardinal.
 - Soient A : 3 obtenir Face exactement une fois et B : 3 obtenir Pile au plus deux fois. Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(\bar{A})$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$.
- On lance un dé cubique non truqué deux fois successivement. On note (a, b) le résultat.
 - Donner Ω et son cardinal.
 - Soient A : les deux nombres sont égaux, B : les deux nombres sont pairs, C : le produit est 12. Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup C)$.

Exercice 5 — Probabilités conditionnelles + tableau croisé

Une classe de 23 élèves :

	Redoublants	Nouveaux	Total
Garçons	8	3	11
Filles	7	5	12
Total	15	8	23

On choisit un élève au hasard (équiprobabilité). Soient G : « garçon », F : « fille », I : « redoublant ».

1. Calculer $P(G)$, $P(F)$, $P(I)$.
2. Calculer $P(G \cap I)$ et $P(F \cap I)$.
3. Sachant que l'élève est un garçon, calculer $P(I | G)$.
4. Calculer $P(F | I)$, $P(G | I)$. Interpréter.
5. Les événements G et I sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 6 — Arbre pondéré + formule des probabilités totales

Deux urnes :

- U_1 contient 8 billets de 50 MAD et 2 billets de 100 MAD.
- U_2 contient 6 billets de 100 MAD et 6 billets de 200 MAD.

On tire un billet de U_1 puis un billet de U_2 .

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de gagner exactement 250 MAD.
3. Calculer la probabilité de gagner au moins 250 MAD.
4. Sachant que le gain total est ≥ 250 MAD, calculer la probabilité que le premier tirage soit un 100 MAD.

Exercice 7 — Test médical (Bayes)

Une maladie touche 2% des bovins. Un test est positif chez 85% des malades et négatif chez 95% des sains. On note M : « malade » et T : « test positif ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(M \cap T)$, $P(\overline{M} \cap T)$, et en déduire $P(T)$.
3. Calculer $P(M | T)$. Commenter le résultat.
4. Calculer $P(\overline{M} | \overline{T})$.

Exercice 8 — Variable aléatoire : loi, espérance, variance

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6, indiscernables au toucher. On tire un jeton au hasard. Soit X le gain défini par :

- Si le numéro est pair : on gagne 5 DH.
- Si le numéro est 1 : on gagne 40 DH.
- Sinon (numéro 3 ou 5) : on perd 15 DH.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de probabilité de X .
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.
3. Le jeu est-il favorable, défavorable ou équitable ?
4. On joue à ce jeu 100 fois. Quel gain peut-on espérer en moyenne ?

Exercice 9 — Loi binomiale

Un tireur d'arc atteint la cible avec une probabilité $p = \frac{2}{3}$ à chaque tir. Il effectue 10 tirs indépendants. Soit X le nombre de cibles atteintes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Calculer (au millième près) :

(a) $P(X = 6)$

(c) $P(X \geq 8)$

(b) $P(X = 0)$

(d) $P(X \leq 5)$

4. Quel est le nombre minimum de tirs nécessaires pour que la probabilité de toucher la cible au moins une fois soit $\geq 0,99$?

Exercice 10 — QCM type Bac : machines

Un technicien contrôle des machines. On sait que :

- 20% des machines sont sous garantie ;
- 0,2% sont à la fois défectueuses et sous garantie ;
- 8,2% sont défectueuses.

Soit G : « sous garantie », D : « défectueuse ».

1. Calculer $P(D | G)$.
2. Calculer $P(\overline{G} \cap D)$.
3. La machine est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle soit sous garantie (à 10^{-3} près).
4. Les événements D et G sont-ils indépendants ? Justifier.
5. On choisit n machines indépendamment. Soit X le nombre de machines défectueuses. Quelle est la loi de X ?
 - (a) Pour $n = 50$, calculer $P(X > 2)$ à 10^{-3} près.
 - (b) Déterminer la plus grande valeur de n pour laquelle la probabilité que toutes les machines fonctionnent correctement reste $\geq 0,4$.