

Table des matières

1	Principe fondamental de dénombrement	2
2	Arrangements	2
3	Permutations	3
4	Combinaisons et binôme de Newton	4
	Propriétés	4
	Binôme de Newton	4
5	Probabilité d'un événement	5
6	Probabilité conditionnelle - Indépendance	6
	Multiplication	6
	Probabilités totales	6
7	Variable aléatoire - Loi binomiale	7
7.1	Variable aléatoire	7
7.2	Loi binomiale	8

1 Principe fondamental de dénombrement

Propriété

Si une situation de dénombrement s'effectue en p étapes successives, et que chacune peut être réalisée respectivement de $n_1, n_2, \dots, n_p$ manières différentes, alors le nombre total de possibilités est :

$$N = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p.$$

Exemple

« Code à 4 chiffres. »

Combien de codes PIN (4 chiffres de 0 à 9, avec répétition possible) peut-on former ?

Solution. 4 étapes, chacune ayant 10 choix possibles : $N = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10000$ codes.

Application

- 1 Une porte d'immeuble est commandée par un code : une lettre parmi $\{A, B, C\}$ suivie de trois chiffres parmi $\{1, 2, \dots, 9\}$. Combien de codes peut-on proposer ?
- 2 Combien de codes commencent par A ? par $B9$? Combien comportent trois chiffres distincts ?

À faire à la maison

Dans une entreprise de 800 employés, on relève : 300 hommes, 352 syndiqués, 424 mariés, 188 hommes syndiqués, 166 hommes mariés, 208 syndiqués mariés, 144 hommes mariés syndiqués.

- 1 Combien de femmes célibataires non syndiquées ?
- 2 Combien d'hommes mariés non syndiqués ?
- 3 Combien de syndiqués célibataires ?

2 Arrangements

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$, $p \in \mathbb{N}^*$.

- Un *arrangement avec répétition* de p éléments de E est un p -uplet $(x_1, \dots, x_p)$. Le nombre de tels arrangements est n^p .
- Un *arrangement sans répétition* de p éléments de E est un p -uplet $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments deux à deux distincts (avec $1 \leq p \leq n$). Le nombre est :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Remarque

- n^p : tirage successif **avec remise** de p boules dans une urne de n boules.
- A_n^p : tirage successif **sans remise** de p boules dans une urne de n boules.
- Convention : $A_n^0 = 1$.

Exemple

« Tirage avec et sans remise. »

Un sac contient 6 boules numérotées de 1 à 6. Combien de tirages successifs de 3 boules : (a) avec remise? (b) sans remise?

Solution. (a) avec remise : $6^3 = 216$. (b) sans remise : $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

Application

Une association de 20 membres souhaite élire un président, un secrétaire et un trésorier (sans cumul). Combien de choix?

À faire à la maison

Une urne contient 6 jetons verts, 5 rouges, 3 bleus. On tire 4 jetons successivement et sans remise.

- 1 Nombre total de tirages possibles?
- 2 Nombre de tirages où les 3 premiers jetons sont verts.
- 3 Nombre de tirages dont le premier est vert.
- 4 Nombre de tirages comportant exactement un jeton vert.
- 5 Nombre de tirages comportant au moins un jeton vert.

3 Permutations

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$.

- Une *permutation* de E est un arrangement sans répétition de tous ses éléments.
- Le nombre de permutations de E est noté $n!$ (factorielle de n) avec :

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1, \quad 0! = 1.$$

Remarque

- $n! = A_n^n$; $(n+1)! = (n+1) \times n!$.
- **Permutations avec répétition.** Si parmi n objets on a n_1 de type 1, ..., n_k de type k (avec $n_1 + \cdots + n_k = n$), le nombre de permutations distinctes est :

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}.$$

Exemple

« Anagrammes. »

Combien d'anagrammes du mot « MAMAN » peut-on former?

Solution. 5 lettres : M, A, M, A, N donc $n_M = 2$, $n_A = 2$, $n_N = 1$. Nombre :

$$\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{120}{4} = 30.$$

Application

- 1 Combien d'anagrammes du mot « JUIN » ? du mot « MAISON » ?
- 2 De combien de façons peut-on ranger 10 livres sur une étagère ?
- 3 Pour $n \geq 3$, simplifier : $\frac{n!}{(n-1)!}, \frac{(n+1)!}{(n-1)!}, \frac{(n-2)!}{n!}$.

À faire à la maison

Parmi les 10 participants à un tournoi d'échecs : 4 Français, 3 Américains, 2 Anglais, 1 Marocain. Si dans le classement on ne lit que la nationalité (et pas l'identité) de chaque joueur, à combien de classements distincts une telle liste correspond-elle ?

4 Combinaisons et binôme de Newton

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n$. Une *combinaison* de p éléments de E est une partie de E à p éléments. Le nombre de combinaisons est noté C_n^p avec :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Remarque

C_n^p correspond à un **tirage simultané** de p boules dans une urne de n boules (sans ordre, sans répétition).

Propriété

Propriétés

- $C_n^0 = C_n^n = 1$
- $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
- **Symétrie** : $C_n^p = C_n^{n-p}$
- **Pascal** : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$

Propriété

Binôme de Newton

Pour tous réels a, b et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Exemple

« Choix avec contrainte. »

Un groupe de 8 élèves : 5 filles et 3 garçons. On choisit 3 élèves au hasard. Combien de formations comportent exactement deux filles ?

Solution. Choix de 2 filles parmi 5 et 1 garçon parmi 3 :

$$C_5^2 \times C_3^1 = 10 \times 3 = 30.$$

Application

- 1 Calculer C_8^4 ; combien de tirages au loto (6 numéros parmi 49) ?
- 2 Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On tire simultanément 4 boules. Calculer le nombre de tirages comportant : (a) une seule blanche, (b) au moins une blanche.
- 3 Développer $(x+1)^6$ avec le binôme de Newton.

À faire à la maison

- 1 Montrer que $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ (indication : développer $(1+1)^n$).
- 2 Montrer que $p C_n^p = n C_{n-1}^{p-1}$.
- 3 Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. On tire simultanément 3 boules.
 - a. Nombre total de tirages possibles ?
 - b. Nombre de tirages dont les chiffres sont tous pairs ?
 - c. Nombre de tirages où le produit des chiffres est nul ?
- 4 Développer $(2x-1)^5$ et $(x+2)^7$.

5 Probabilité d'un événement

Définition

Une *expérience aléatoire* a des résultats imprévisibles parmi un ensemble connu.

- *Univers* Ω : ensemble de tous les résultats possibles.
- *Événement* : sous-ensemble de Ω . *Événement élémentaire* : singleton.
- *Événement contraire* de A : $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
- *Intersection* : $A \cap B$; *réunion* : $A \cup B$.
- *Événements incompatibles* : $A \cap B = \emptyset$.

Définition

La *probabilité* d'un événement A , notée $P(A)$, est un nombre dans $[0;1]$. Si tous les événements élémentaires sont équiprobables (*équiprobabilité*) :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Propriété

Soient A, B deux événements.

- $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$, $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Si $A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple

« Tirage simultané. »

Un sac contient 4 boules rouges, 3 vertes, 2 blanches. On tire simultanément 3 boules. Calculer $P(A)$ où A : « obtenir 3 boules rouges ».

Solution. Cas possibles : $C_9^3 = 84$. Cas favorables : $C_4^3 = 4$. Donc $P(A) = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$.

Application

Un sac contient 4 rouges, 3 vertes, 2 blanches. On tire 3 boules simultanément. Calculer P pour chaque événement :

- A : « 3 boules de même couleur »
- C : « exactement une rouge »
- B : « 3 couleurs distinctes deux à deux »
- D : « au moins une blanche »

À faire à la maison

On lance une pièce non truquée 3 fois successivement.

- 1 À l'aide d'un arbre, déterminer Ω et son cardinal.
- 2 Soient A : « obtenir face exactement une fois » et B : « obtenir pile au plus deux fois ». Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(\bar{A})$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$.
- 3 Soit C : « obtenir trois résultats identiques ». A et C sont-ils incompatibles ?

6 Probabilité conditionnelle - Indépendance

Définition

Soit B un événement avec $P(B) > 0$. La *probabilité conditionnelle* de A sachant B est :

$$P(A | B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Propriété

Multiplication

Si $P(B) > 0$: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B) = P(A) \cdot P(B | A)$.

Propriété

Probabilités totales

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment un *système complet* d'événements (deux à deux incompatibles, de réunion Ω , tous de probabilité non nulle), alors pour tout événement B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i).$$

Cas particulier ($n = 2$, $A_1 = A$, $A_2 = \bar{A}$) :

$$P(B) = P(A) \cdot P(B | A) + P(\bar{A}) \cdot P(B | \bar{A}).$$

Définition

Deux événements A et B sont *indépendants* si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

De manière équivalente (si $P(A), P(B) > 0$) : $P(A | B) = P(A)$ ou $P(B | A) = P(B)$.

Exemple

« Test médical (Bayes). »

Une maladie touche 2% des bovins. Le test est positif dans 85% des cas chez un malade et négatif dans 95% des cas chez un sain. Quelle est la probabilité qu'un animal au test positif soit réellement malade ?

Solution. Notons M : malade, T : test positif. Données : $P(M) = 0,02$, $P(T | M) = 0,85$, $P(\bar{T} | \bar{M}) = 0,95$ donc $P(T | \bar{M}) = 0,05$.

$$P(T) = P(M)P(T | M) + P(\bar{M})P(T | \bar{M}) = 0,02 \times 0,85 + 0,98 \times 0,05 = 0,066.$$

$$P(M | T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,02 \times 0,85}{0,066} = \frac{0,017}{0,066} \approx 0,258.$$

Soit environ 25,8%.

Application

Deux urnes : U_1 contient 8 billets de 50 MAD et 2 billets de 100 MAD ; U_2 contient 6 billets de 100 MAD et 6 billets de 200 MAD. On tire un billet de U_1 puis un de U_2 .

- 1 Représenter par un arbre pondéré.
- 2 Calculer la probabilité de gagner au moins 250 MAD.

À faire à la maison

Un technicien contrôle des machines : 20% sont sous garantie, 0,2% sont défectueuses et sous garantie, 8,2% sont défectueuses. Notons G : « sous garantie », D : « défectueuse ».

- 1 Calculer $P(G \cap D)$, $P(G)$, $P(D)$. En déduire $P(D | G)$.
- 2 Calculer $P(\bar{G} \cap D)$.
- 3 La machine est défectueuse : quelle est la probabilité qu'elle soit sous garantie (à 10^{-3} près) ?
- 4 Les événements D et G sont-ils indépendants ? Justifier.

7 Variable aléatoire - Loi binomiale

7.1 Variable aléatoire

Définition

Une *variable aléatoire* (v.a.) sur Ω est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. L'ensemble des valeurs possibles est noté $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. La *loi de probabilité* de X est la donnée des $P(X = x_i)$, avec $\sum_i P(X = x_i) = 1$.

Définition

Soit X une v.a. avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

- *Espérance* : $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$.
- *Variance* : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_i x_i^2 P(X = x_i) - (E(X))^2$.
- *Écart-type* : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

« Calcul d'espérance et variance. »

Soit X de loi : $P(X = -1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 2) = \frac{1}{4}$. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.

Solution.

$$E(X) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$E(X^2) = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

$$V(X) = \frac{7}{4} - \frac{1}{16} = \frac{27}{16}, \quad \sigma(X) = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

7.2 Loi binomiale

Définition

Soit une expérience qui répète n fois indépendamment une même épreuve (épreuve de Bernoulli) où l'événement A a probabilité p . Soit X la v.a. comptant le nombre de réalisations de A . Alors X suit la *loi binomiale* de paramètres n et p , notée $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, et :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Propriété

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$:

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Exemple

« Loi binomiale. »

On lance une pièce non truquée 5 fois. Soit X le nombre de « face ». Donner la loi, $E(X)$ et $V(X)$.

Solution. $X \sim \mathcal{B}(5, \frac{1}{2})$. $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. $P(X = k) = C_5^k \times \frac{1}{32}$. $E(X) = \frac{5}{2} = 2,5$, $V(X) = \frac{5}{4} = 1,25$.

Application

- 1 On lance un dé cubique équilibré. Soit A : « obtenir un diviseur de 3 ». Calculer $P(A)$. On répète l'expérience 3 fois ; soit X le nombre de réalisations de A . Donner la loi de X .
- 2 Un tireur d'arc atteint la cible avec probabilité $\frac{2}{3}$. Il fait 10 tentatives indépendantes. Quelle est la probabilité d'atteindre la cible exactement 6 fois ?

À faire à la maison

Les utilisateurs de vélo d'une ville se répartissent en deux catégories disjointes : déplacements professionnels ou loisirs uniquement. Sondage : 21% ont moins de 35 ans (parmi eux 68% pour loisirs) ; parmi les ≥ 35 ans, seuls 20% utilisent le vélo professionnellement. Notons J : « moins de 35 ans », T : « usage professionnel ».

- 1 Calculer $P(J \cap T)$ à l'aide d'un arbre pondéré.
- 2 Calculer la valeur exacte de $P(T)$.
- 3 Sachant qu'un cycliste utilise son vélo professionnellement, montrer que la probabilité qu'il ait moins de 35 ans est $\approx 0,30$.
- 4 On sélectionne 120 cyclistes professionnels (avec remise). 30% d'entre eux ont moins de 35 ans. Soit X le nombre de cyclistes du panel ayant moins de 35 ans.
 - a. Donner la loi de X . Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
 - b. Calculer la probabilité qu'au moins 50 cyclistes du panel aient moins de 35 ans (calculatrice/à 10^{-3} près).