

Série d'exercices N°7 (S2)

Produit scalaire dans l'espace

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Consignes. Travailler dans un repère orthonormé. Pour chaque équation cartésienne de plan, donner un vecteur normal.

Couverture. 12 exercices : calculs, équations de plans avec vecteur normal, distance, sphères, lieux géométriques, problèmes de synthèse.

I. Calculs et orthogonalité

Exercice 1 *Produits scalaires*

Soient $\vec{u}(1, -2, 3)$, $\vec{v}(2, 1, -1)$, $\vec{w}(0, 3, 4)$.

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$.
2. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$.
3. Déterminer la mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
4. Trouver m pour que $\vec{u}$ et $(m, 1, 1)$ soient orthogonaux.

Exercice 2 *Orthogonalité de droites*

1. Vérifier que les droites (D_1) de vecteur directeur $(2, 1, -1)$ et (D_2) de vecteur directeur $(1, -1, 1)$ sont orthogonales.
2. Soit $\vec{u}(1, 2, 3)$. Trouver tous les vecteurs unitaires orthogonaux à $\vec{u}$ contenus dans le plan $y = 0$.

II. Équations de plans

Exercice 3 *Plans avec vecteur normal*

1. Plan passant par $A(1, 2, -1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3, -1, 2)$.
2. Plan passant par $A(0, 1, 2)$ et perpendiculaire à la droite $(D) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$.
3. Plan médiateur de $[AB]$ avec $A(1, -1, 2)$ et $B(3, 1, 0)$.
4. Plan passant par $A(2, 0, 1)$ et parallèle au plan $(P) : 3x - y + 2z = 7$.

Exercice 4 *Plan défini par 3 points*

Soient $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$.

1. Trouver un vecteur normal à (ABC) .
2. Écrire l'équation cartésienne de (ABC) .
3. Calculer la distance de O à (ABC) .

III. Distances et projections

Exercice 5 *Distance d'un point à un plan*

1. Calculer $d(M, (P))$ pour $M(2, -1, 3)$ et $(P) : 2x - y + 2z - 5 = 0$.
2. Trouver tous les points sur l'axe (Oz) à distance 3 du plan $(P) : x + 2y + 2z - 6 = 0$.

Exercice 6 *Projection orthogonale*

Soit $(P) : x + y - z + 2 = 0$ et $A(2, 0, -1)$.

1. Calculer $d(A, (P))$.
2. Déterminer le projeté orthogonal H de A sur (P) .
3. Déterminer le symétrique A' de A par rapport à (P) .

IV. Sphères

Exercice 7 *Équations de sphères*

1. Sphère de centre $\Omega(2, -3, 1)$ et rayon 4.
2. Reconnaître $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$.
3. Reconnaître $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 14 = 0$.
4. Sphère de diamètre $[AB]$ avec $A(1, 2, 0)$ et $B(3, 0, 4)$.

Exercice 8 *Sphère et plan*

Soit $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(1, -1, 2)$ et rayon $\sqrt{14}$, et le plan $(P) : 2x - y + 3z + 5 = 0$.

1. Calculer $d(\Omega, (P))$.
2. Étudier la position relative de $\mathcal{S}$ et (P) .
3. Si l'intersection est un cercle, donner son centre et son rayon.

V. Lieux géométriques

Exercice 9 *Lieu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$*

Soient $A(1, 0, 0)$ et $B(3, 0, 0)$.

1. Déterminer le lieu des M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
2. Déterminer le lieu des M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -1$.
3. Déterminer le lieu des M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.

Exercice 10 *Lieux orthogonalité*

Soient $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$.

1. Déterminer le lieu des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.
2. Déterminer le lieu des M tels que $MA = MB$.

VI. Problèmes de synthèse

Exercice 11 *Tétraèdre orthocentrique*

$ABCD$ est un tétraèdre avec $A(0, 0, 0)$, $B(3, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $D(0, 0, 5)$.

1. Donner l'équation cartésienne de chacune des faces.
2. Calculer le volume du tétraèdre.
3. Calculer la distance de A à la face (BCD) .

Exercice 12 *Cube et sphère inscrite*

Dans le cube de sommets opposés $A(0, 0, 0)$ et $G(2, 2, 2)$, on considère la sphère inscrite (tangente aux 6 faces).

1. Donner le centre et le rayon de cette sphère.
2. Donner son équation cartésienne.
3. Vérifier que la diagonale (AG) passe par le centre.

Fin de la série – Produit scalaire dans l'espace