

Produit scalaire dans l'espace

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 11h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : produit scalaire dans le plan, vecteurs et analytique de l'espace.

Capacités attendues : exprimer et démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs à l'aide du produit scalaire ; exprimer vectoriellement et analytiquement l'orthogonalité et ses propriétés ; déterminer un plan à partir d'un point et d'un vecteur normal ; déterminer la droite passant par un point et perpendiculaire à un plan ; déterminer une équation cartésienne ou paramétrique d'une sphère ; reconnaître l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

Table des matières

1	Produit scalaire dans l'espace	2
1.1	Définition	2
1.2	Expression analytique en BON	2
1.3	Propriétés	2
2	Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan	3
2.1	Vecteur normal	3
2.2	Équation cartésienne d'un plan	3
2.3	Droite perpendiculaire à un plan	3
2.4	Distance d'un point à un plan	3
3	Sphère	5
3.1	Définition et équation cartésienne	5
3.2	Forme développée	5
3.3	Sphère de diamètre $[AB]$	5
3.4	Ensemble des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$	5
3.5	Position relative sphère/plan	6
4	Synthèse	7
4.1	Récapitulatif	7
4.2	Pièges classiques	7

1. Produit scalaire dans l'espace

1.1 Définition

Définition

Définition 1.1 — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Si on les représente par $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, alors O, A, B sont dans un plan : le **produit scalaire** se calcule dans ce plan :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}).$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

1.2 Expression analytique en BON

Théorème

Théorème 1.1 — Dans une **base orthonormée** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

En particulier, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et la distance $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

1.3 Propriétés

Propriété

Propriété 1.1 —

- Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- Bilinéarité : $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{w})$.
- Carré scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- Orthogonalité : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2. Vecteur normal et équation cartésienne d'un plan

2.1 Vecteur normal

Définition

Définition 2.1 — Un **vecteur normal** à un plan (P) est un vecteur *non nul* orthogonal à tout vecteur du plan.

Pour montrer que $\vec{n}$ est normal à (P) , il suffit de vérifier qu'il est orthogonal à *deux* vecteurs non colinéaires de (P) .

2.2 Équation cartésienne d'un plan

Théorème

Théorème 2.1 — Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le plan (P) passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ a pour équation cartésienne :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

soit $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Réciproquement, si $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est l'équation d'un plan, alors $\vec{n}(a, b, c)$ en est un vecteur normal.

Exemple

Exemple 2.1 — Équation cartésienne du plan passant par $A(2, -1, 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1, 2, -1)$:

$$1 \cdot (x - 2) + 2 \cdot (y + 1) - 1 \cdot (z - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z + 3 = 0.$$

2.3 Droite perpendiculaire à un plan

Théorème

Théorème 2.2 — La droite (D) passant par A et perpendiculaire à (P) a pour vecteur directeur tout vecteur normal $\vec{n}$ à (P) .

Si $(P) : ax + by + cz + d = 0$, (D) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.4 Distance d'un point à un plan

Théorème

Théorème 2.3 — Soit $(P) : ax + by + cz + d = 0$ et $M(x_0, y_0, z_0)$. La distance de M à (P) est :

$$d(M, (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemple

Exemple 2.2 — Distance de $M(1, 2, 3)$ au plan $(P) : 2x - y + 2z - 4 = 0$:

$$d = \frac{|2 - 2 + 6 - 4|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|2|}{3} = \frac{2}{3}.$$

3. Sphère

3.1 Définition et équation cartésienne

Théorème

Théorème 3.1 — Dans un repère orthonormé, la **sphère** $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(a, b, c)$ et rayon $r > 0$ a pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

3.2 Forme développée

Propriété

Propriété 3.1 — Une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + e = 0$$

représente :

- Une **sphère** de centre $\Omega(a, b, c)$ et rayon $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - e}$ si $a^2 + b^2 + c^2 - e > 0$.
- Un **point** $\{\Omega(a, b, c)\}$ si $a^2 + b^2 + c^2 - e = 0$.
- L'**ensemble vide** si $a^2 + b^2 + c^2 - e < 0$.

On utilise la *complétion du carré* pour reconnaître une sphère.

Exemple

Exemple 3.1 — Étudier $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 5 = 0$.

Solution. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 4 + 1 + 9 - 5 = 9$.

Sphère de centre $\Omega(2, -1, 3)$ et rayon 3.

3.3 Sphère de diamètre $[AB]$

Théorème

Théorème 3.2 — La sphère $\mathcal{S}$ de **diamètre** $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

3.4 Ensemble des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

Théorème

Théorème 3.3 — Soient A, B deux points fixes, I le milieu de $[AB]$ et $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble des M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ est :

- Sphère de centre I et rayon $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$ si $k + \frac{AB^2}{4} > 0$.
- Point $\{I\}$ si $k + \frac{AB^2}{4} = 0$.
- Ensemble vide si $k + \frac{AB^2}{4} < 0$.

3.5 Position relative sphère/plan

Théorème

Théorème 3.4 — Soit $\mathcal{S}$ de centre Ω et rayon r , et (P) un plan. On note $d = d(\Omega, (P))$.

- $d > r$: pas d'intersection (le plan ne coupe pas la sphère).
- $d = r$: le plan est *tangent* à la sphère en un unique point.
- $d < r$: le plan coupe la sphère selon un *cercle* de rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$.

4. Synthèse

4.1 Récapitulatif

Objet	Caractérisation
$\vec{u} \cdot \vec{v}$ (BON)	$xx' + yy' + zz'$
AB	$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
$\vec{u} \perp \vec{v}$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
Plan par A , normal $\vec{n}(a, b, c)$	$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$
$d(M, (P))$	$\frac{ ax_M + by_M + cz_M + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
Sphère	$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$
Diamètre $[AB]$	$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$
Sphère $\cap$ plan	cercle si $d < r$, point si $d = r$, $\emptyset$ si $d > r$

4.2 Pièges classiques

Remarque

1. **BON pour** $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$. Indispensable.
2. **Vecteur normal.** Doit être orthogonal à *deux* vecteurs non colinéaires du plan.
3. **Sphère.** $a^2 + b^2 + c^2 - e > 0$ pour obtenir une vraie sphère (cas = 0 : un point ; cas < 0 : vide).
4. **Distance à un plan.** Toujours valeur absolue au numérateur.