

Série d'exercices N°6

Produit scalaire analytique

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Consignes. Tous les calculs analytiques sont à effectuer dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour les équations de droites, préciser vecteur directeur et vecteur normal.

Couverture. 16 exercices : calculs analytiques, orthogonalité, droites, cercles, lieux géométriques, applications.

I. Calculs analytiques

Exercice 1 *Produits scalaires et normes*

Dans un repère orthonormé, on donne $A(2, -1)$, $B(4, 3)$, $C(-1, 5)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. Calculer les longueurs AB , AC , BC .
3. Le triangle ABC est-il rectangle ? Si oui, en quel sommet ?
4. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ (à 0,1 près).

Exercice 2 *Vecteurs orthogonaux et déterminant*

1. Trouver m pour que $\vec{u}(3, m)$ et $\vec{v}(4, -2)$ soient orthogonaux.
2. Trouver m pour que $\vec{u}(m, 1)$ et $\vec{v}(2m, -3)$ soient colinéaires.
3. Soient $\vec{u}(2, 3)$. Donner un vecteur unitaire de même direction et un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$.

II. Droites

Exercice 3 *Équations cartésiennes et paramétriques*

1. Écrire l'équation cartésienne de la droite (D_1) passant par $A(3, -2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2, 5)$.
2. Écrire l'équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite (D_2) passant par $A(1, 4)$ et $B(-3, 6)$.
3. La droite $(D_3) : 4x - 3y + 12 = 0$. Donner un vecteur normal, un vecteur directeur, et un point.
4. Donner une représentation paramétrique de (D_3) ; puis revenir à l'équation cartésienne.

Exercice 4 *Position relative de deux droites*

1. Étudier la position relative des droites :

$$(D_1) : 2x - 3y + 1 = 0 \quad \text{et} \quad (D_2) : 4x - 6y - 5 = 0.$$

2. Étudier la position relative de :

$$(D_3) : x + 2y - 4 = 0 \quad \text{et} \quad (D_4) : 3x - y + 1 = 0.$$

Préciser les coordonnées du point d'intersection.

3. Soit $(D) : 3x + 4y - 12 = 0$. Trouver l'équation de la perpendiculaire à (D) passant par $A(2, 5)$.

Exercice 5 *Distance d'un point à une droite*

1. Calculer $d(A, (D))$ pour $A(1, -2)$ et $(D) : 5x - 12y + 7 = 0$.
2. Soient $A(3, 0)$, $B(0, 4)$. Trouver $d(O, (AB))$.
3. Soit $(D) : x - 2y + 5 = 0$ et $A(3, 1)$. Trouver les coordonnées du projeté orthogonal de A sur (D) .

III. Cercles**Exercice 6** *Équations de cercles*

1. Écrire l'équation du cercle de centre $\Omega(3, -1)$ et de rayon 4.
2. Reconnaître la nature de l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$. Si c'est un cercle, donner centre et rayon.
3. Idem pour $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 25 = 0$.
4. Idem pour $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 10 = 0$.

Exercice 8 *Lieux du type $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$*

Soient $A(0, 0)$ et $B(4, 0)$.

1. Déterminer le lieu des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
2. Déterminer le lieu des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.
3. Déterminer le lieu des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -3$.
4. Déterminer le lieu des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -4$.

Exercice 9 *Intersection droite/cercle*

Soit le cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ et la droite $(D) : x + y - 4 = 0$.

1. Déterminer le centre Ω et le rayon r de $\mathcal{C}$.
2. Calculer $d(\Omega, (D))$. Comparer avec r . En déduire la position relative.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection (si elles existent).

IV. Lieux et synthèse**Exercice 10** *Lieu type $MA = MB$*

Soient $A(1, 3)$ et $B(5, -1)$.

1. Déterminer l'ensemble des M tels que $MA = MB$.
2. Reconnaître géométriquement cet ensemble.

Exercice 11 *Lieu $MA^2 + MB^2 = k$*

Soient $A(-2, 0)$ et $B(2, 0)$ et I le milieu de $[AB]$.

1. Montrer que $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.

2. Déterminer le lieu des M tels que $MA^2 + MB^2 = 18$.

Exercice 12 *Tangente à un cercle*

Soit $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ et $A(8, 1)$.

1. Vérifier que $A \in \mathcal{C}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en A .

Exercice 13 *Problème de synthèse*

On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0$ et la droite $(D) : 2x + y - 4 = 0$.

1. Déterminer le centre Ω et le rayon r de $\mathcal{C}$.
2. Calculer $d(\Omega, (D))$. Étudier la position relative.
3. Si la droite et le cercle se coupent, donner les points d'intersection.
4. Déterminer l'équation de la droite passant par Ω et perpendiculaire à (D) .

V. Géométrie du triangle**Exercice 14** *Hauteurs et orthocentre*

Soit ABC un triangle avec $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(2, 4)$.

1. Écrire l'équation de chacune des trois hauteurs.
2. Montrer qu'elles sont concourantes en un point H et donner ses coordonnées (*orthocentre*).
3. Calculer $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 15 *Cercle circonscrit*

Soit ABC un triangle avec $A(0, 0)$, $B(8, 0)$, $C(4, 6)$.

1. Déterminer les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$.
2. En déduire le centre Ω du cercle circonscrit.
3. Calculer le rayon R .
4. Donner l'équation du cercle circonscrit.

