

Produit scalaire analytique

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 13h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : produit scalaire (tronc commun), vecteurs et repère, équation d'une droite, trigonométrie de base.

Capacités attendues : exprimer le parallélisme et l'orthogonalité de deux droites ; calculer distances et angles à l'aide du produit scalaire ; reconnaître l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$; déterminer centre et rayon d'un cercle par son équation cartésienne ; passer de l'équation cartésienne à la représentation paramétrique et inversement ; appliquer le produit scalaire à la résolution de problèmes géométriques.

Table des matières

1	Rappels et expression analytique	2
1.1	Rappels sur le produit scalaire (tronc commun)	2
1.2	Expression analytique dans une base orthonormée	2
1.3	Norme et distance	2
1.4	Identités remarquables	3
2	Parallélisme, orthogonalité, angles	4
2.1	Orthogonalité de deux vecteurs	4
2.2	Calcul d'un angle	4
2.3	Déterminant et parallélisme	4
3	Équations cartésienne et paramétrique d'une droite	5
3.1	Vecteur directeur, vecteur normal	5
3.2	Équation cartésienne	5
3.3	Représentation paramétrique	5
3.4	Distance d'un point à une droite	6
4	Cercles dans le plan	7
4.1	Équation cartésienne d'un cercle	7
4.2	Forme développée	7
4.3	Cercle de diamètre $[AB]$	7
4.4	Ensemble des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$	8
5	Synthèse	9
5.1	Récapitulatif	9
5.2	Pièges classiques	9

1. Rappels et expression analytique

1.1 Rappels sur le produit scalaire (tronc commun)

Définition

Définition 1.1 — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}).$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on convient $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété

Propriété 1.1 — Propriétés du produit scalaire :

- (a) *Symétrie* : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- (b) *Bilinéarité* : $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{w})$.
- (c) *Carré scalaire* : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, noté aussi $\vec{u}^2$.
- (d) *Orthogonalité* : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (avec convention pour le vecteur nul).

1.2 Expression analytique dans une base orthonormée

Théorème

Théorème 1.1 — Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base *orthonormée*. Si $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ dans cette base, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Démonstration

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Par bilinéarité :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'(\vec{i} \cdot \vec{i}) + xy'(\vec{i} \cdot \vec{j}) + yx'(\vec{j} \cdot \vec{i}) + yy'(\vec{j} \cdot \vec{j}).$$

Or $(\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée : $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$. □

1.3 Norme et distance

Propriété

Propriété 1.2 — Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée. Pour $\vec{u}(x, y)$ et deux points $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

1.4 Identités remarquables

Propriété

Propriété 1.3 — Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) \quad (\text{identité de polarisation})$$

2. Parallélisme, orthogonalité, angles

2.1 Orthogonalité de deux vecteurs

Théorème

Théorème 2.1 — Dans une base orthonormée, $\vec{u}(x, y) \perp \vec{v}(x', y') \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

2.2 Calcul d'un angle

Propriété

Propriété 2.1 — Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls. L'angle $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ vérifie :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

En particulier : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \cos \theta = 0$.

Exemple

Exemple 2.1 — Soient $A(1, 2)$, $B(4, 6)$, $C(8, 3)$. Le triangle ABC est-il rectangle ?

Solution. On calcule les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = (3, 4), \quad \overrightarrow{AC} = (7, 1), \quad \overrightarrow{BC} = (4, -3).$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 21 + 4 = 25 \neq 0 \quad ; \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 12 - 12 = 0.$$

Donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$: le triangle est **rectangle en B**.

2.3 Déterminant et parallélisme

Propriété

Propriété 2.2 — Dans une base orthonormée, le **déterminant** de $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ est :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'.$$

Alors : $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ (colinéarité).

3. Équations cartésienne et paramétrique d'une droite

3.1 Vecteur directeur, vecteur normal

Définition

Définition 3.1 — Soit (D) une droite du plan. Un vecteur non nul $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** de (D) si $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ pour deux points A, B distincts de (D) .

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est un **vecteur normal** de (D) si $\vec{n} \perp \vec{u}$ pour tout vecteur directeur $\vec{u}$.

3.2 Équation cartésienne

Théorème

Théorème 3.1 — Dans un repère orthonormé, une droite (D) admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec} \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Le vecteur $\vec{n}(a, b)$ est alors un **vecteur normal** à (D) ; et $\vec{u}(-b, a)$ est un **vecteur directeur**.

Réciproquement, l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $ax + by + c = 0$ (avec $(a, b) \neq (0, 0)$) est une droite.

Méthode

Pour écrire l'équation cartésienne d'une droite (D) :

- Connaissant $A(x_A, y_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a, b)$: $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.
- Connaissant $A(x_A, y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$: le vecteur normal est $(-\beta, \alpha)$: équation $-\beta(x - x_A) + \alpha(y - y_A) = 0$.
- Connaissant deux points A et B : prendre $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Exemple

Exemple 3.1 — Écrire l'équation cartésienne de la droite passant par $A(2, -3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(4, 1)$.

Solution. $4(x - 2) + 1(y + 3) = 0 \Leftrightarrow 4x + y - 5 = 0$.

3.3 Représentation paramétrique

Théorème

Théorème 3.2 — Une droite (D) passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta)$ admet la **représentation paramétrique** :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Méthode

Passage cartésien $\rightarrow$ paramétrique.

Trouver un point A sur la droite (poser $x = 0$ ou $y = 0$ par ex.), puis lire $\vec{u}(-b, a)$ depuis $ax + by + c = 0$.

Passage paramétrique $\rightarrow$ cartésien.

Éliminer t entre les deux équations.

Exemple

Exemple 3.2 — La droite $(D) : 2x - 3y + 6 = 0$ admet :

- **Vecteur normal** : $\vec{n}(2, -3)$.
- **Vecteur directeur** : $\vec{u}(3, 2)$.
- **Point** : $A(0, 2)$ (en prenant $x = 0 : -3y + 6 = 0$).
- **Paramétrique** : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$.

3.4 Distance d'un point à une droite

Théorème

Théorème 3.3 — La distance du point $A(x_0, y_0)$ à la droite $(D) : ax + by + c = 0$ (dans un repère orthonormé) est :

$$d(A, (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exemple

Exemple 3.3 — Distance du point $A(3, -1)$ à la droite $(D) : 3x - 4y + 5 = 0$:

$$d = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|9 + 4 + 5|}{5} = \frac{18}{5}.$$

4. Cercles dans le plan

4.1 Équation cartésienne d'un cercle

Théorème

Théorème 4.1 — Dans un repère orthonormé, le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $r > 0$ a pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Démonstration

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad \square$$

4.2 Forme développée

Propriété

Propriété 4.1 — Toute équation de la forme

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

représente :

- Un **cercle** de centre $\Omega(a, b)$ et rayon $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ si $a^2 + b^2 - c > 0$.
- Un **point** $\{\Omega(a, b)\}$ si $a^2 + b^2 - c = 0$.
- L'**ensemble vide** si $a^2 + b^2 - c < 0$.

Méthode

Pour reconnaître un cercle à partir de l'équation développée, on procède par *complétion du carré* :

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by + c = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Exemple

Exemple 4.1 — Étudier l'équation $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

Solution. Complétion :

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

C'est un **cercle** de centre $\Omega(2, -3)$ et rayon 5.

4.3 Cercle de diamètre $[AB]$

Théorème

Théorème 4.2 — Soient A et B deux points distincts. Le cercle $\mathcal{C}$ de **diamètre** $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration

Soit I le milieu de $[AB]$. Le cercle de diamètre $[AB]$ a centre I et rayon $\frac{AB}{2}$.

En décomposant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$ (car I milieu) :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2}$, ce qui caractérise les points du cercle de centre I et rayon $\frac{AB}{2}$. $\square$

Exemple

Exemple 4.2 — Équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1, 2)$, $B(5, 6)$.

Solution. Pour $M(x, y)$: $\overrightarrow{MA}(1-x, 2-y)$, $\overrightarrow{MB}(5-x, 6-y)$.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (1-x)(5-x) + (2-y)(6-y) = 0.$$

Développement : $5 - 6x + x^2 + 12 - 8y + y^2 = 0$, soit

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 17 = 0.$$

4.4 Ensemble des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ **Théorème**

Théorème 4.3 — Soient A, B deux points distincts, I le milieu de $[AB]$, et $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble des M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ est :

$$\{ M \mid MI^2 = k + \frac{AB^2}{4} \}.$$

- **Cercle** de centre I et rayon $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$ si $k + \frac{AB^2}{4} > 0$;
- **Point** $\{I\}$ si $k + \frac{AB^2}{4} = 0$;
- **Ensemble vide** si $k + \frac{AB^2}{4} < 0$.

Démonstration

On utilise la décomposition vectorielle :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}.$$

Or I milieu de $[AB]$ donne $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\|\overrightarrow{IA}\|^2 = -\frac{AB^2}{4}$.

Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k$, soit $MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$. $\square$

5. Synthèse

5.1 Récapitulatif

Objet	Caractérisation analytique
$\vec{u} \cdot \vec{v}$ (BON)	$xx' + yy'$
$\ \vec{u}\ $ (BON)	$\sqrt{x^2 + y^2}$
AB	$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
$\vec{u} \perp \vec{v}$	$xx' + yy' = 0$
$\vec{u} \parallel \vec{v}$	$\det = xy' - yx' = 0$
Droite (D)	$ax + by + c = 0$; normal (a, b) , directeur $(-b, a)$
$d(A, (D))$	$\frac{ ax_A + by_A + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$
Cercle centre $\Omega(a, b)$, rayon r	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
Diamètre $[AB]$	$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$
$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$	Cercle centre I (milieu AB), rayon $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$

5.2 Pièges classiques

Remarque

1. **Formule** $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ **valable uniquement en BON**. En base non orthonormée, ce n'est pas vrai.
2. **Confondre vecteur directeur et vecteur normal**. Pour $(D) : ax + by + c = 0$, $\vec{n}(a, b)$ est *normal*, pas directeur.
3. **Distance avec valeur absolue**. Toujours mettre les barres : $|ax_A + by_A + c|$, pas l'expression brute.
4. **Discriminant négatif pour le cercle**. Si $a^2 + b^2 - c < 0$, ce n'est pas un cercle (ensemble vide).
5. **Théorème de l'angle inscrit $\Rightarrow$ produit scalaire nul**. Bien vérifier $A \neq M \neq B$.