

Table des matières

1	Définition du produit scalaire	2
1.1	Définition par projection orthogonale	2
2	Propriétés et orthogonalité	3
2.1	Règles de calcul	3
2.2	Vecteurs orthogonaux	3
3	Théorème d'Al Kashi	4
4	Théorème de la médiane et lieux géométriques	4
5	Relations métriques dans un triangle rectangle	6

1 Définition du produit scalaire

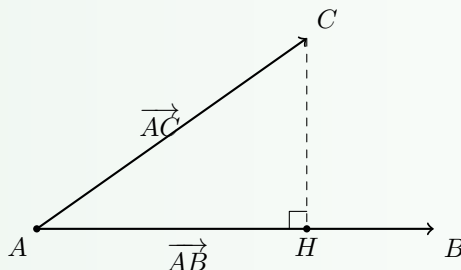
1.1 Définition par projection orthogonale

DÉFINITION 1

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls. On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le nombre réel

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH},$$

où $\overline{AB}$ et $\overline{AH}$ sont des mesures algébriques prises sur la droite (AB) orientée de A vers B .



Si l'un des deux vecteurs est nul, leur produit scalaire est nul.

PROPRIÉTÉ

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha,$$

où α est une mesure de l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En particulier,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}.$$

REMARQUE

Le signe du produit scalaire renseigne sur l'angle formé par deux vecteurs non nuls. Il est positif pour un angle aigu, nul pour un angle droit et négatif pour un angle obtus.

EXEMPLE

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ lorsque $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{2\pi}{3}$.

PROPRIÉTÉ 1

Si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB) , alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{C'D'}.$$

Cette formule permet de calculer un produit scalaire sans coordonnées.

EXERCICE

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 3$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

2 Propriétés et orthogonalité

2.1 Règles de calcul

PROPRIÉTÉ 2

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k ,

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u}, \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \\ \vec{u} \cdot (k\vec{v}) &= k(\vec{u} \cdot \vec{v}).\end{aligned}$$

DÉFINITION

Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ est

$$(\vec{u})^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2.$$

Ainsi, $(\vec{u})^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

PROPRIÉTÉ 3

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2, \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2, \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

2.2 Vecteurs orthogonaux

DÉFINITION 2

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

PROPRIÉTÉ

Pour trois points A , B et C ,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2).$$

Cette relation est une forme géométrique de la formule de polarisation.

EXERCICE

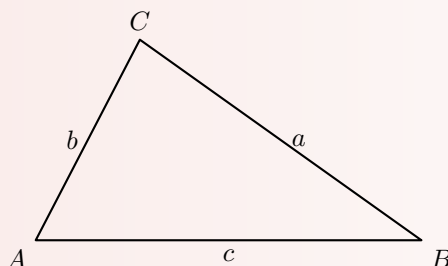
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$. Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

3 Théorème d'Al Kashi

THÉORÈME 1

Dans un triangle ABC , on pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. Alors

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}, \\b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \widehat{B}, \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}.\end{aligned}$$



REMARQUE

Lorsque $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$, on retrouve le théorème de Pythagore. Le théorème d'Al Kashi permet aussi de calculer un angle, par exemple

$$\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

EXEMPLE

Dans un triangle ABC , $AB = 3$, $AC = 5$ et $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$. Calculer BC à l'aide du théorème d'Al-Kashi.

PROPRIÉTÉ

L'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle ABC vérifie

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \widehat{BAC}.$$

Cette formule est utile lorsque deux côtés et l'angle compris sont connus.

EXERCICE

Dans un triangle ABC , on donne $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 5$. Calculer $\cos \widehat{A}$, puis déterminer l'aire du triangle.

4 Théorème de la médiane et lieux géométriques

PROPRIÉTÉ 4

Soient A et B deux points distincts, I le milieu de $[AB]$ et M un point du plan. Alors

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

THÉORÈME 2

Avec les mêmes notations,

$$\begin{aligned}MA^2 - MB^2 &= 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}, \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= MI^2 - \frac{1}{4}AB^2, \\ MA^2 + MB^2 &= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2.\end{aligned}$$

La dernière égalité est le théorème de la médiane.

PROPRIÉTÉ

Dans un triangle ABC , si I est le milieu de $[AB]$, alors

$$CI^2 = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2) - \frac{1}{4}AB^2.$$

PROPRIÉTÉ 5

Les égalités précédentes permettent de reconnaître des lieux usuels.

- $MA = MB$ caractérise la médiatrice de $[AB]$.
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ caractérise le cercle de diamètre $[AB]$.
- $MA^2 + MB^2 = k$, avec $k > \frac{1}{2}AB^2$, caractérise un cercle de centre I .
- $MA^2 - MB^2 = k$ caractérise une droite perpendiculaire à (AB) .

EXERCICE

A et B sont deux points tels que $AB = 6$ et I est le milieu de $[AB]$. Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 26$.

5 Relations métriques dans un triangle rectangle

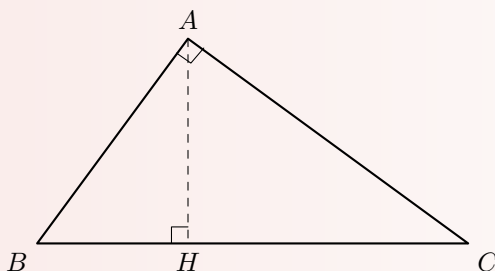
THÉORÈME 3

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. Alors

$$\begin{aligned}AB^2 &= BH \times BC, \\AC^2 &= CH \times BC, \\AH^2 &= BH \times CH, \\AB \times AC &= AH \times BC.\end{aligned}$$

Si I est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$, alors

$$AI = BI = CI = \frac{1}{2}BC.$$



REMARQUE

Réciproquement, chacune des égalités $AB^2 = BH \times BC$, $AC^2 = CH \times BC$ et $AI = \frac{1}{2}BC$ permet, avec les hypothèses géométriques correspondantes, de reconnaître un triangle rectangle en A .

EXEMPLE

Dans un triangle rectangle en A , le pied H de la hauteur issue de A vérifie $BH = 9$ et $CH = 16$. Calculer BC , AB , AC et AH .

EXERCICE

ABC est rectangle en A , H est le pied de la hauteur issue de A , $BH = 4$ et $CH = 5$. Calculer BC , AB , AC et AH .

À retenir

PROPRIÉTÉ

Le produit scalaire se construit géométriquement par projection orthogonale. Il sert à reconnaître l'orthogonalité, calculer des longueurs, des angles et des aires, établir des relations métriques et déterminer des lieux géométriques. Son expression analytique n'est pas étudiée au Tronc Commun.