

Table des matières

1	Le produit scalaire dans le plan	2
2	Expression analytique du produit scalaire	2
3	Droite dans le plan	3
4	Étude analytique d'un cercle	4
	Exercice de synthèse à la maison	5

1 Le produit scalaire dans le plan

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

- Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
- Le **carré scalaire** de $\vec{u}$ est $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exemple

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en B tel que $AB = 2$, $AC = \sqrt{8}$ et $(\vec{AB}; \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

- 1 Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ et $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$.
- 2 Que peut-on en déduire pour $\vec{BA}$ et $\vec{BC}$?

Application

Soient A , B et C trois points du plan tels que $AB = 3$, $AC = 4$ et $(\vec{AB}; \vec{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

- 1 Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
- 2 En déduire la longueur BC en utilisant l'identité $BC^2 = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2$.

2 Expression analytique du produit scalaire

Dans toute la suite, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition

Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite **orthonormée** si $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$. Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est dit **orthonormé direct** si la base est orthonormée et $(\vec{i}, \vec{j}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Propriété

Soient $\vec{u}(x; y)$, $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs du plan, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points.

- **Produit scalaire** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
- **Orthogonalité** : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.
- **Norme** : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Distance** : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- **Cosinus et sinus de l'angle orienté** : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et $\theta = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$,

$$\cos \theta = \frac{xx' + yy'}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{xy' - x'y}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

- **Aire d'un triangle** : l'aire du triangle ABC est $S = \frac{|\det(\vec{AB}, \vec{AC})|}{2}$ avec $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

Exemple

On considère les points $A(-3; 1)$, $B(1; 1)$ et $C(-5; -1)$ et les vecteurs $\vec{u}(-\sqrt{3}; -3)$ et $\vec{v}(-1; \sqrt{3})$.

- 1 Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$. En déduire $\cos \theta$ et $\sin \theta$ où $\theta = (\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$, puis la valeur de θ .
- 2 Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- 3 En déduire l'aire du triangle ABC et la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}})$.

Application

- 1 Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}(2; -3)$ et $\vec{v}(-1; 2)$.
- 2 Soient $\vec{u} = (\sqrt{3} - 1)\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = (\sqrt{3} + 1)\vec{i} + 2\vec{j}$. Montrer que $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- 3 Déterminer $m \in \mathbb{R}$ pour que $\vec{u}(3; -1 + m)$ et $\vec{v}(2 - m; 5)$ soient orthogonaux.
- 4 Soient $A(-3; 1)$, $B(1; 1)$ et $C(-3; 5)$. Calculer AB , AC , BC et déterminer la nature du triangle ABC .

3 Droite dans le plan

Définition

Soit $(D) = D(A; \vec{u})$ une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Tout vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ est appelé **vecteur normal** à (D) .

Propriété

Soient (D) d'équation $ax + by + c = 0$, $A(x_A; y_A)$ un point et $\vec{n}(a; b)$ un vecteur normal.

- **Vecteurs caractéristiques** : $\vec{n}(a; b)$ est normal à (D) ; $\vec{u}(-b; a)$ est directeur.
- **Équation par point + normal** : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.
- **Positions relatives** : pour deux droites (D) et (D') de vecteurs normaux $\vec{n}, \vec{n}'$:

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0, \quad (D) \parallel (D') \Leftrightarrow \det(\vec{n}, \vec{n}') = 0.$$

- **Distance d'un point à une droite** : $d(A; (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Exemple

On considère $(D) : 4x + 3y + 1 = 0$ et $(D') : x - 2y + 8 = 0$.

- 1 Donner un vecteur normal et un vecteur directeur à (D) , puis à (D') .
- 2 Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par $A(1; 2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(5; 3)$.
- 3 Étudier la position relative de (D) et (D') .
- 4 Calculer $d(A; (D))$ avec $A(2; 1)$, et $d(B; (D))$ avec $B(-1; 1)$. Que constate-t-on pour B ?
- 5 Soit $E(-3; 5)$ et H son projeté orthogonal sur (D') . Calculer $d(E; (D'))$ et déterminer les coordonnées de H .

Application

- 1 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(2; 3)$ de vecteur normal $\vec{n}(2; -1)$.
- 2 Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(3; -1)$ et $B(-1; 5)$.
- 3 Étudier la position relative de $(D_1) : 2x + y - 1 = 0$ et $(D_2) : -x + 2y + 3 = 0$.

4 Étude analytique d'un cercle

Définition

Le **cercle** $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = R$.
Une **tangente** à $(\mathcal{C})$ au point $A \in (\mathcal{C})$ est une droite passant par A et perpendiculaire à (ΩA) .

Propriété

Soient $(\mathcal{C})$ un cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ (avec $a^2 + b^2 - 4c > 0$), de centre $\Omega(-a/2; -b/2)$ et de rayon R , et $M(x_0; y_0)$ un point.

- **Équation par centre et rayon** : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, soit $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0$.
- **Équation par diamètre $[AB]$** : $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$, c'est-à-dire $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$.
- **Représentation paramétrique** : $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.
- **Position d'un point** : $M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$; M est intérieur ssi < 0 ; extérieur ssi > 0 .
- **Position d'une droite (D) par rapport à $(\mathcal{C})$** : comparer $d(\Omega; (D))$ à R (extérieure si $>$, tangente si $=$, sécante si $<$).
- **Tangente en $A \in (\mathcal{C})$** : (D) tangente $\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{A\Omega} = 0$ pour tout $M \in (D)$.

Exemple

On considère le cercle $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ et le cercle $(\mathcal{C}') : x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$.

- 1 Déterminer le centre et le rayon de $(\mathcal{C})$ et de $(\mathcal{C}')$.
- 2 Vérifier que $A(2; 4) \in (\mathcal{C})$ et déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ en A .
- 3 Donner une représentation paramétrique de $(\mathcal{C}')$.
- 4 Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de la droite $(D) : x + y + 2 = 0$. En cas de sécante, donner les coordonnées des points d'intersection.

Application

- 1 Déterminer une équation du cercle de centre $\Omega(-2; 3)$ et de rayon 4.
- 2 Déterminer une équation du cercle de centre $A(2; 3)$ passant par $B(1; -3)$.
- 3 Pour chaque équation, indiquer si elle représente un cercle (et préciser centre et rayon), un point, ou l'ensemble vide :
 - $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 14 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$
 - $x^2 - x + y^2 + 3y - 4 = 0$
- 4 Soient $A(-1; 2)$ et $B(-5; 4)$. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ par deux méthodes différentes.

Exercice à la maison

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(2; -1)$, $B(-4; -3)$, $C(1; -3)$.

- 1 Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}})$ et $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}})$. En déduire la mesure principale de l'angle.
- 2 Calculer l'aire du triangle ABC .
- 3 Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par B et perpendiculaire à (AC) .
- 4 Soit $(C) : x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$. Déterminer son centre et son rayon. Vérifier que (C) est le cercle de diamètre $[AB]$.
- 5 Donner une équation cartésienne de la tangente Δ à (C) en A , puis une représentation paramétrique de (C) .
- 6 Étudier la position relative de (C) et (D) . Donner les coordonnées des points d'intersection s'ils existent.
- 7 Résoudre graphiquement le système :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 < 0 \\ x + 2y + 10 \geq 0 \end{cases}.$$