

Série d'exercices N°8 (S2)

Produit vectoriel

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Consignes. Travailler en BOND. Vérifier l'orthogonalité $\vec{u} \wedge \vec{v}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ après chaque calcul.

Couverture. 10 exercices : calculs, aires, équations de plans par 3 points, volumes, distances, problèmes synthétiques.

I. Calculs et propriétés

Exercice 1 *Calculs directs*

Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

1. $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(2, -1, 1)$.
2. $\vec{u}(0, 1, -2)$, $\vec{v}(3, 0, 1)$.
3. $\vec{u}(2, 4, -2)$, $\vec{v}(1, 2, -1)$. Conclure.
4. $\vec{u}(a, 0, 0)$ et $\vec{v}(0, b, 0)$ (avec $a, b > 0$).

Exercice 2 *Propriétés*

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

1. Démontrer que $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ par les coordonnées.
2. Vérifier l'identité de Lagrange $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$ sur $\vec{u}(1, 0, 1)$ et $\vec{v}(2, 1, -1)$.
3. Trouver m pour que $\vec{u}(m, 1, 2) \wedge \vec{v}(1, m, -1) = \vec{0}$.

II. Aires

Exercice 3 *Aire de triangles*

1. Calculer l'aire du triangle ABC avec $A(0, 0, 0)$, $B(3, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$. Vérifier par la formule classique.
2. Calculer l'aire du triangle ABC avec $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(0, 2, 1)$.
3. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}(1, -2, 3)$ et $\vec{v}(0, 1, 1)$.

III. Équations de plans

Exercice 4 *Plan par 3 points*

Donner l'équation cartésienne du plan (ABC) en utilisant le produit vectoriel.

1. $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.
2. $A(2, -1, 3)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, 1, 4)$.
3. $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(3, 5, 7)$. Que constate-t-on ? Conclure.

IV. Volumes

Exercice 5 *Volume d'un tétraèdre*

Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ pour :

1. $A(0, 0, 0)$, $B(3, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $D(0, 0, 6)$.
2. $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 1)$, $C(0, 2, 2)$, $D(3, 1, 4)$.
3. Quatre points A, B, C, D tels que $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ soient coplanaires : conclure sur le volume.

Exercice 6 *Hauteur d'un tétraèdre*

Soit le tétraèdre $ABCD$ avec $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$, $D(1, 1, 5)$.

1. Calculer l'aire de la base (ABC) .
2. Calculer le volume du tétraèdre.
3. En déduire la hauteur issue de D (i.e. $d(D, (ABC))$).

V. Distances

Exercice 7 *Distance d'un point à une droite*

1. Calculer la distance de $M(1, 2, 3)$ à la droite passant par $A(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, 1)$.
2. Calculer la distance de $M(3, 1, -1)$ à la droite (AB) avec $A(1, 0, 2)$ et $B(2, 1, 0)$.

VI. Problèmes de synthèse

Exercice 8 *Cube*

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1, avec $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $E(0, 0, 1)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$. Conclure.
2. Calculer l'aire du triangle BDG .
3. Calculer le volume du tétraèdre $ABDE$.
4. Calculer la distance de A à la droite (BD) .

Exercice 9 *Pyramide à base carrée*

$ABCD$ est un carré de côté a dans le plan $z = 0$, et S est le sommet de la pyramide tel que $S(a/2, a/2, h)$ ($h > 0$).

1. Calculer l'aire de la base $ABCD$.
2. Calculer le volume de la pyramide à l'aide du produit mixte.
3. Calculer l'aire latérale (par produit vectoriel sur une face triangulaire et multiplication).