

Produit vectoriel

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 5h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : produit scalaire dans l'espace, équations de plans, déterminants.

Capacités attendues : calculer l'aire d'un triangle à l'aide du produit vectoriel ; déterminer l'équation d'un plan défini par trois points non alignés ; appliquer le produit vectoriel à la résolution de problèmes géométriques et physiques.

Table des matières

1. Définition du produit vectoriel

1.1 Repère orthonormé direct

Définition

Définition 1.1 — Un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit **direct** si l'orientation $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ correspond à la règle de la main droite (pouce/index/majeur).

1.2 Définition vectorielle

Définition

Définition 1.2 — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est le vecteur défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Sinon, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur tel que :
 - (1) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est *orthogonal* à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;
 - (2) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})|$;
 - (3) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ forme un *trièdre direct*.

1.3 Expression analytique en BOND

Théorème

Théorème 1.1 — Dans une **base orthonormée directe** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$. Alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx').$$

On peut le mémoriser par le **déterminant formel** :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & x & x' \\ \vec{j} & y & y' \\ \vec{k} & z & z' \end{vmatrix} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}.$$

Exemple

Exemple 1.1 — Soient $\vec{u}(1, 2, 3)$ et $\vec{v}(4, -1, 2)$. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Solution.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1), 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2, 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 4) = (4 + 3, 12 - 2, -1 - 8) = (7, 10, -9).$$

Vérification : $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 7 + 20 - 27 = 0$. ✓

2. Propriétés du produit vectoriel

Propriété

Propriété 2.1 — Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

- (a) **Antisymétrie** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$. En particulier, $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- (b) **Bilinéarité** : $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{w}) + \beta(\vec{v} \wedge \vec{w})$, et symétriquement à droite.
- (c) **Colinéarité** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- (d) **Orthogonalité** : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
- (e) **Norme** : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$ (*identité de Lagrange*).

Remarque

Le produit vectoriel n'est *pas* associatif en général : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \neq (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

3. Applications géométriques

3.1 Aire d'un triangle et d'un parallélogramme

Théorème

Théorème 3.1 — Soient A, B, C trois points de l'espace.

- L'aire du **parallélogramme** construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est :

$$\mathcal{A}_{\text{parallélogramme}} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.$$

- L'aire du **triangle** ABC est :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.$$

Exemple

Exemple 3.1 — Calculer l'aire du triangle ABC avec $A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 1)$, $C(1, 3, 0)$.

Solution. $\overrightarrow{AB}(2, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC}(1, 3, 0)$.

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1 \cdot 0 - 1 \cdot 3, 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0, 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1) = (-3, 1, 5).$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9 + 1 + 25} = \sqrt{35}.$$

$$\text{Aire : } \frac{\sqrt{35}}{2}.$$

3.2 Équation cartésienne d'un plan défini par 3 points

Méthode

Pour trouver l'équation cartésienne du plan (ABC) :

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$: c'est un vecteur normal du plan.
3. Écrire l'équation $\vec{n} \cdot (M - A) = 0$, i.e. $n_1(x - x_A) + n_2(y - y_A) + n_3(z - z_A) = 0$.

Exemple

Exemple 3.2 — Équation du plan (ABC) avec $A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 1)$, $C(1, 3, 0)$.

Solution. D'après le calcul précédent, $\vec{n} = (-3, 1, 5)$. Plan passant par $A(0, 0, 0)$:

$$-3x + y + 5z = 0.$$

3.3 Volume d'un tétraèdre

Théorème

Théorème 3.2 — Le **volume** du tétraèdre $ABCD$ est :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|.$$

Remarque

Le produit $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$ s'appelle **produit mixte**. Sa valeur absolue donne le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Analytiquement, le produit mixte est le **déterminant** 3×3 des coordonnées des trois vecteurs.

Exemple

Exemple 3.3 — Volume du tétraèdre $ABCD$ avec $A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 1)$, $C(1, 3, 0)$, $D(1, 1, 4)$.

Solution. $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = (-3, 1, 5) \cdot (1, 1, 4) = -3 + 1 + 20 = 18$.

$$V = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3.$$

3.4 Distance d'un point à une droite

Théorème

Théorème 3.3 — Soit (D) une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, et M un point. La distance de M à (D) est :

$$d(M, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

4. Synthèse

4.1 Récapitulatif

Objet	Formule (BOND)
$\vec{u} \wedge \vec{v}$	$(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$
$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$	antisymétrie
$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$	ssi $\vec{u}, \vec{v}$ colinéaires
$\ \vec{u} \wedge \vec{v}\ $	$\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \sin \theta $
Aire triangle ABC	$\frac{1}{2} \ \vec{AB} \wedge \vec{AC}\ $
Vecteur normal de (ABC)	$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$
Volume tétraèdre	$\frac{1}{6} (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} $
$d(M, (D))$	$\frac{\ \vec{AM} \wedge \vec{u}\ }{\ \vec{u}\ }$

4.2 Pièges classiques

Remarque

1. **Antisymétrie.** $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{v} \wedge \vec{u}$ (signe opposé).
2. **Non-associativité.** $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \neq (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.
3. **BOND obligatoire.** La formule analytique exige une base orthonormée *directe*.
4. **Confondre wedge et produit scalaire.** $\wedge$ donne un *vecteur*, $\cdot$ donne un *scalaire*.
5. **Volume sans valeur absolue.** Penser à mettre la valeur absolue sur le produit mixte.