

Table des matières

1	Projection d'un point sur une droite	1	3	Théorème de Thalès (forme vectorielle)	3
2	Propriétés de la projection	2	3.1	Énoncé vectoriel	3
			3.2	Énoncé classique dans un triangle	3
			4	Application : milieu et partage d'un segment	4

1 Projection d'un point sur une droite

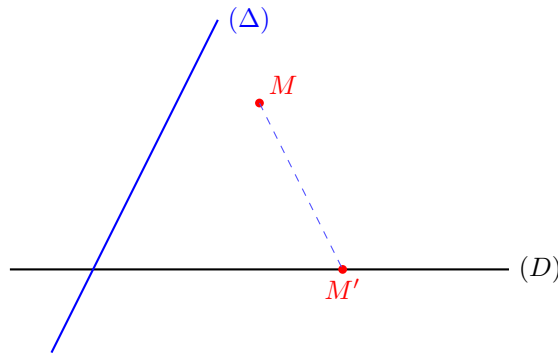
DÉFINITION 1

Soient (D) et (Δ) deux droites **sécantes** du plan.

Pour tout point M du plan, on appelle **projeté** de M sur la droite (D) parallèlement à la droite (Δ) l'unique point M' de (D) tel que :

$$(MM') \parallel (\Delta) \quad \text{ou} \quad M = M'.$$

On dit que M' est l'**image** de M par la projection sur (D) parallèlement à (Δ) .



REMARQUE

- Si (D) et (Δ) sont *parallèles*, la projection n'est pas définie.
- Si $M \in (D)$, alors $M' = M$.
- Lorsque $(\Delta) \perp (D)$, on parle de **projection orthogonale** de M sur (D) .

EXEMPLE

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Projeter A , B , C et D sur (AB) parallèlement à (AD) .

EXERCICE

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en O , et M un point n'appartenant ni à (D) ni à (Δ) .

- 1 Construire le projeté M' de M sur (D) parallèlement à (Δ) .
- 2 Construire le projeté M'' de M sur (Δ) parallèlement à (D) .
- 3 Quelle est la nature du quadrilatère $OM'MM''$?

2 Propriétés de la projection

PROPRIÉTÉ 1

Conservation de l'alignement.

Si A, B, C sont trois points alignés et A', B', C' leurs projetés respectifs sur (D) parallèlement à (Δ) , alors A', B', C' sont alignés sur (D) .

PROPRIÉTÉ 2

Conservation du milieu.

Si I est le milieu de $[AB]$ et si A', B', I' sont les projetés respectifs de A, B, I sur (D) parallèlement à (Δ) , alors I' est le milieu de $[A'B']$.

PROPRIÉTÉ 3

Conservation des rapports sur une droite.

Si A, B, C sont alignés et si leurs projetés A', B', C' sont distincts, alors $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$. La projection conserve donc les coefficients de partage. En particulier, si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ sur une droite, alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$ sur l'axe (D) de projection. Cette propriété conduit au théorème de Thalès.

REMARQUE

Attention : la projection *ne conserve pas* en général :

- les distances (sauf cas particulier),
- les angles (sauf cas particulier).

EXEMPLE

Des points alignés A, B, C ont pour projetés A', B', C' . Si B est le milieu de $[AC]$, déterminer la position de B' .

EXERCICE

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. On projette sur la droite (AB) parallèlement à la droite (AC) .

- 1 Donner les projetés des points A, B et C .
- 2 En déduire le projeté du point I .

3 Théorème de Thalès (forme vectorielle)

3.1 Énoncé vectoriel

THÉORÈME 1

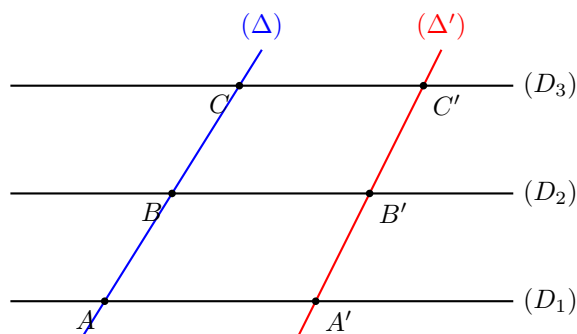
Théorème de Thalès.

Soient (D_1) , (D_2) , (D_3) trois droites parallèles et distinctes, coupant deux droites sécantes (Δ) et (Δ') respectivement en A, B, C et A', B', C' .

Alors :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'C'}}.$$

(Égalité de mesures algébriques.)



3.2 Énoncé classique dans un triangle

THÉORÈME

Soit ABC un triangle, et soient $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$ tels que $(MN) \parallel (BC)$. Alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}, \quad \text{et vectoriellement : } \overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = k \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN} = k \overrightarrow{BC},$$

où k est un nombre réel commun.

THÉORÈME 2

Réciproque du théorème de Thalès.

Soit ABC un triangle, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (et M, N du même côté de A), alors $(MN) \parallel (BC)$.

EXEMPLE

Dans un triangle ABC , $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ vérifient $AM = \frac{1}{3}AB$ et $AN = \frac{1}{3}AC$. Montrer que $(MN) \parallel (BC)$ puis exprimer MN en fonction de BC .

EXERCICE

Soit ABC un triangle. Soit M le point de $[AB]$ tel que $AM = \frac{1}{3}AB$, et soit N le point d'intersection de (AC) avec la parallèle à (BC) passant par M .

- 1 Que vaut le rapport $\frac{AN}{AC}$?
- 2 On donne $AC = 9$ cm. Calculer AN , puis NC .
- 3 On donne $BC = 12$ cm. Calculer MN .

4 Application : milieu et partage d'un segment

PROPRIÉTÉ

Théorème des milieux.

Soit ABC un triangle, et soient I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$. Alors :

$$(IJ) \parallel (BC) \quad \text{et} \quad IJ = \frac{1}{2}BC.$$

PROPRIÉTÉ

Théorème réciproque.

Soit ABC un triangle. Si I est le milieu de $[AB]$ et si la parallèle à (BC) passant par I coupe (AC) en J , alors J est le milieu de $[AC]$.

EXEMPLE

Dans un quadrilatère $ABCD$, les points P, Q, R, S sont les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CD], [DA]$. Montrer que $PQRS$ est un parallélogramme.

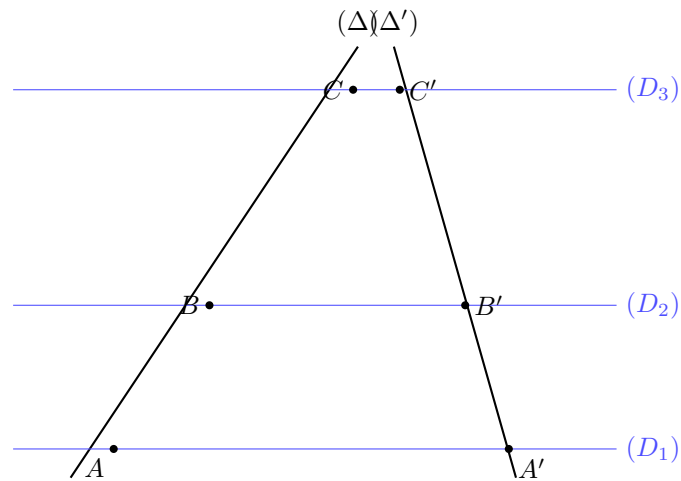
EXERCICE

Soit ABC un triangle, et soient $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

- 1 Montrer que $(MN) \parallel (BC)$.
- 2 Déterminer MN en fonction de BC .

EXERCICE

Sur la figure ci-dessous, $(D_1) \parallel (D_2) \parallel (D_3)$. On donne $AB = 4$, $BC = 6$ et $A'B' = 2$. Calculer $B'C'$, puis $A'C'$.



EXERCICE

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. Soit A' le milieu de $[BC]$.

- 1 Justifier que A, G, A' sont alignés.
- 2 Montrer que $\frac{AG}{AA'} = \frac{2}{3}$.
- 3 La parallèle à (BC) passant par G coupe $[AB]$ en M et $[AC]$ en N . Montrer que $MN = \frac{2}{3}BC$.