

Série d'exercices — Rotation dans le plan

1^{ère} BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1

Soit Ω un point du plan orienté direct. Pour chacune des rotations suivantes, donner la rotation réciproque :

1. $r\left(\Omega; \frac{\pi}{4}\right)$.

3. $r(\Omega; \pi)$.

2. $r\left(\Omega; -\frac{\pi}{3}\right)$.

4. $r\left(\Omega; \frac{2\pi}{3}\right)$.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- Déterminer $r(A)$, $r(B)$, $r(C)$, $r(D)$.
- Soit I le milieu de $[AB]$. Déterminer $r(I)$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Construire à l'extérieur de ABC deux carrés $ABEF$ et $ACGH$.

- Déterminer $r(B)$ et $r(F)$.
- Montrer que $CF = BH$ (où H est le point tel que défini).

Exercice 4

Soient A et B deux points distincts du plan. On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit $C = r(B)$.

Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A .

Exercice 5

Soit ABC un triangle équilatéral direct. On construit à l'extérieur de ABC trois carrés $BCDE$, $CAFG$ et $ABHI$.

Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- Déterminer $r(C)$ et $r(D)$.
- Montrer que $AD = HE$.

Exercice 6

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O . Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soient M et N deux points tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Montrer que $r(M) = N$.
2. En déduire $OM = ON$ et $(OM) \perp (ON)$.

Exercice 7

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit M un point du segment $[BC]$ et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note $N = r(M)$.

1. Montrer que N appartient à la droite (AB) (ou son prolongement) et que $AN = AM$.
2. Montrer que le triangle AMN est rectangle isocèle en A .

Exercice 8

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On considère deux rotations de même angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs A et C . Soit r_A et r_C .

Soit $E = r_A(B)$ et $F = r_C(B)$. Montrer que les triangles ABE et CBF sont rectangles isocèles, et comparer les longueurs BE et BF .

Exercice 9

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O et E un point du segment $[AB]$ ($E \neq A$ et $E \neq B$). Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et $F = r(E)$.

Montrer que F appartient au segment $[BC]$ et que $OE = OF$.

Exercice 10

Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles équilatéraux BCD , CAE et ABF . Soit r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Déterminer $r_1(B)$.
2. Montrer que $AD = BE = CF$.

(Théorème de Napoléon partie classique.)

Exercice 11

Soit $ABCD$ un quadrilatère et G son centre de gravité (barycentre de A, B, C, D avec coefficients 1). Soit r une rotation quelconque de centre Ω et d'angle α , d'images A', B', C', D' de A, B, C, D . Montrer que $r(G) = G'$, où G' est le centre de gravité de $A'B'C'D'$.

Exercice 12

Soit r_1 la rotation de centre A et d'angle α , et r_2 la rotation de centre A et d'angle β . Montrer que $r_2 \circ r_1 = r(A; \alpha + \beta)$.

(Indication : utiliser la conservation de la distance et de l'angle orienté.)