

Série d'exercices N°8

Rotation dans le plan

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Consignes. Pour chaque construction, indiquer explicitement la procédure (cercle, rayons, angle). Pour les démonstrations d'isométrie, utiliser la conservation des distances et des angles.

Couverture. 12 exercices : construction d'images, identification de rotations, propriétés et lieux géométriques, polygones réguliers.

I. Construction et calcul d'images

Exercice 1 Construction d'images élémentaires

Dans le plan, on donne un point Ω , un triangle ABC et un cercle $\mathcal{C}$ de centre I ne passant pas par Ω .

1. Construire $A' = r_{(\Omega, \pi/3)}(A)$.
2. Construire le triangle $A'B'C'$ image du triangle ABC par $r_{(\Omega, \pi/2)}$.
3. Construire le cercle image de $\mathcal{C}$ par $r_{(\Omega, \pi)}$.

Exercice 2 Coordonnées d'image

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on donne $\Omega(2, 1)$ et $M(5, 3)$.

1. Calculer les coordonnées de $M' = r_{(\Omega, \pi/2)}(M)$.
2. Calculer les coordonnées de $M'' = r_{(\Omega, \pi)}(M)$ et vérifier que Ω est le milieu de $[MM'']$.
3. Calculer les coordonnées de $M''' = r_{(\Omega, -\pi/2)}(M)$.

Indication : utiliser que $r_{(\Omega, \theta)}$ envoie $M(x, y)$ sur $M'(x_\Omega + (x - x_\Omega) \cos \theta - (y - y_\Omega) \sin \theta, y_\Omega + (x - x_\Omega) \sin \theta + (y - y_\Omega) \cos \theta)$.

II. Identification et propriétés

Exercice 3 Identifier une rotation

Soit f la transformation du plan définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x - 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une isométrie.
2. Déterminer l'unique point fixe de f .
3. Calculer $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ pour $M(0, 0)$ et son image. Quel est l'angle de la rotation ?
4. Conclure.

Exercice 4 *Conservation des objets*

Soit $\mathcal{R} = r_{(\Omega, \pi/3)}$ et M, N deux points distincts.

1. Démontrer que $\mathcal{R}(M)\mathcal{R}(N) = MN$.
2. Démontrer que l'angle orienté est conservé : $(\widehat{M'N'}, \widehat{M'P'}) = (\widehat{MN}, \widehat{MP})$.
3. En déduire que l'image d'une droite par une rotation est une droite.

III. Composition**Exercice 5** *Composition de rotations*

1. Soit Ω un point et $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$. Déterminer $r_{(\Omega, \theta_2)} \circ r_{(\Omega, \theta_1)}$.
2. Calculer $r_{(\Omega, \pi/3)}^6$.
3. Soit $\mathcal{R} = r_{(O, \pi/4)}$ (centre origine). Montrer que $\mathcal{R}^8 = \text{id}$.
4. Sachant que $\mathcal{R} = r_{(\Omega, \pi/2)}$, déterminer $\mathcal{R}^{-1}$ et $\mathcal{R}^{2025}$.

IV. Polygones réguliers**Exercice 6** *Triangle équilatéral*

Soit ABC un triangle équilatéral de centre G .

1. Soit $\mathcal{R} = r_{(G, 2\pi/3)}$. Montrer que $\mathcal{R}(A) = B$, $\mathcal{R}(B) = C$, $\mathcal{R}(C) = A$.
2. En déduire que $GA = GB = GC$ et que les angles au centre $\widehat{AGB}$, $\widehat{BGC}$, $\widehat{CGA}$ sont tous égaux à $\frac{2\pi}{3}$.
3. Montrer que $\mathcal{R}^3 = \text{id}$.

Exercice 7 *Carré*

Soit $ABCD$ un carré de centre O .

1. Soit $\mathcal{R} = r_{(O, \pi/2)}$. Décrire l'effet de $\mathcal{R}$ sur les sommets A, B, C, D .
2. Calculer $\mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3, \mathcal{R}^4$.
3. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$. Que vaut $\mathcal{R}(I)$?

Exercice 8 *Hexagone*

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier direct de centre O et $\mathcal{R} = r_{(O, \pi/3)}$.

1. Décrire l'image de chacun des sommets.
2. Montrer que $\mathcal{R}^6 = \text{id}$.
3. Soit M le milieu de $[AB]$. Quelle est l'image de M par $\mathcal{R}$?

V. Applications géométriques

Exercice 9 *Construction par rotation*

Soit ABC un triangle quelconque et $\mathcal{R} = r_{(B, \pi/3)}$. On note $A' = \mathcal{R}(A)$ et $C' = \mathcal{R}(C)$.

1. Construire A' et C' .
2. Montrer que le triangle ABA' est équilatéral.
3. Montrer que $AC = A'C'$.

Exercice 10 *Rotation et carré*

Soit $ABCD$ un carré direct (les sommets sont dans le sens trigonométrique). Soit E un point du segment $[BC]$. On note $F = r_{(B, \pi/2)}(E)$.

1. Montrer que F appartient à la droite (BA) .
2. Montrer que $BE = BF$.
3. En déduire que le triangle BEF est rectangle isocèle en B .

Exercice 11 *Pythagore par rotation*

Soit ABC un triangle rectangle en A . On construit le carré $ABDE$ extérieur au triangle, sur le côté $[AB]$.

1. Soit $\mathcal{R} = r_{(B, \pi/2)}$. Calculer $\mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{R}(C)$ (que l'on note C').
2. Montrer que $DC' = AC$.
3. En déduire que $DC = AC + AB$ ou que les triangles ABC et DBC' sont isométriques (selon configuration).

VI. Lieux géométriques

Exercice 12 *Lieux*

Soit Ω un point fixe et A un point variable. On note $A' = r_{(\Omega, \pi/2)}(A)$.

1. Si A décrit la droite (D) , quel est le lieu de A' ?
2. Si A décrit un cercle de centre Ω et rayon r , quel est le lieu de A' ?
3. Si A décrit un cercle de centre $I \neq \Omega$ et rayon r , quel est le lieu de A' ?
4. Si A décrit le segment $[BC]$, quel est le lieu de A' ?