

Rotation dans le plan

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 8h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : transformations vues en collège (symétries, translation), trigonométrie, produit scalaire.

Capacités attendues : utiliser une rotation donnée dans une situation géométrique ; construire l'image d'une figure usuelle par une rotation ; reconnaître une rotation et l'utiliser pour résoudre des problèmes (lieux géométriques, constructions, etc.) ; identifier une congruence à l'aide d'une rotation.

Table des matières

1	Définition et premières propriétés	2
1.1	Définition d'une rotation	2
1.2	Cas particuliers	2
1.3	Conservation des distances et des angles	2
1.4	Bijektivité	3
2	Image d'une figure par une rotation	4
2.1	Image des objets usuels	4
2.2	Construction de l'image d'un point	4
2.3	Cas particulier : symétrie centrale	4
2.4	Cas particulier : quart de tour	4
3	Composition de rotations	5
3.1	Composition de deux rotations de même centre	5
3.2	Itération	5
4	Applications	6
4.1	Polygones réguliers	6
4.2	Identification d'une rotation	6
4.3	Lieu géométrique	6
5	Synthèse	8
5.1	Récapitulatif	8
5.2	Pièges classiques	8

1. Définition et premières propriétés

1.1 Définition d'une rotation

Définition

Définition 1.1 — Soient Ω un point du plan et θ un nombre réel (l'angle, en radian). La **rotation** de **centre** Ω et d'**angle** θ , notée $r_{(\Omega, \theta)}$ ou $\mathcal{R}$, est la transformation du plan qui :

- Fixe Ω : $\mathcal{R}(\Omega) = \Omega$.
- Pour tout $M \neq \Omega$: $\mathcal{R}(M) = M'$ avec :
 - $\Omega M' = \Omega M$ (conservation de la distance au centre) ;
 - $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi]$ (angle orienté).

1.2 Cas particuliers

Remarque

- Si $\theta = 0$ (ou $2k\pi$) : $\mathcal{R}$ est l'**identité** : $\mathcal{R}(M) = M$ pour tout M .
- Si $\theta = \pi$ (ou $\pi + 2k\pi$) : $\mathcal{R}$ est la **symétrie centrale** de centre Ω (demi-tour).
- Si $\theta = \frac{\pi}{2}$: **quart de tour direct**. Si $\theta = -\frac{\pi}{2}$: quart de tour indirect.

1.3 Conservation des distances et des angles

Théorème

Théorème 1.1 — (Isométrie) La rotation $\mathcal{R}$ est une **isométrie** : pour tous points A, B et leurs images $A' = \mathcal{R}(A)$, $B' = \mathcal{R}(B)$:

$$A'B' = AB.$$

De plus, la rotation **conserve les angles orientés** :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Démonstration

Conservation des distances. Posons $u = \Omega A$ et $v = \Omega B$. Alors :

$$\vec{AB} = \vec{\Omega B} - \vec{\Omega A}, \quad |AB|^2 = |\vec{\Omega B}|^2 + |\vec{\Omega A}|^2 - 2\vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega B} = v^2 + u^2 - 2uv \cos(\widehat{\Omega A, \Omega B}).$$

Pour $A' = \mathcal{R}(A)$, $B' = \mathcal{R}(B)$: $\Omega A' = \Omega A = u$, $\Omega B' = \Omega B = v$, et l'angle entre $\vec{\Omega A'}$ et $\vec{\Omega B'}$ est égal à celui entre $\vec{\Omega A}$ et $\vec{\Omega B}$ (les deux ont subi la rotation d'angle θ , leur différence est inchangée). Donc $|A'B'|^2 = |AB|^2$, soit $A'B' = AB$. $\square$

1.4 Bijectivité

Propriété

Propriété 1.1 — La rotation $r_{(\Omega, \theta)}$ est une bijection du plan. Sa bijection réciproque est la rotation $r_{(\Omega, -\theta)}$.

2. Image d'une figure par une rotation

2.1 Image des objets usuels

Théorème

Théorème 2.1 — Soit $\mathcal{R} = r_{(\Omega, \theta)}$ une rotation.

- L'image d'une **droite** (D) est une droite (D') ; l'angle orienté entre (D) et (D') vaut θ .
- L'image d'un **segment** $[AB]$ est un segment $[A'B']$ de même longueur.
- L'image d'un **cercle** de centre I et rayon r est un cercle de centre $\mathcal{R}(I)$ et même rayon r .
- L'image d'un **triangle** est un triangle *isométrique* (même forme, même dimensions).

2.2 Construction de l'image d'un point

Méthode

Pour construire $M' = r_{(\Omega, \theta)}(M)$:

1. Tracer le cercle de centre Ω et de rayon ΩM .
2. Tracer le rayon $[\Omega M)$.
3. Tracer le rayon faisant un angle θ avec $[\Omega M)$ (sens trigonométrique si $\theta > 0$).
4. M' est l'intersection de ce nouveau rayon avec le cercle.

2.3 Cas particulier : symétrie centrale

Propriété

Propriété 2.1 — La rotation d'angle π et de centre Ω est la **symétrie centrale** s_Ω : Ω est le milieu de $[MM']$ pour tout M .

Caractérisation : $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$.

2.4 Cas particulier : quart de tour

Exemple

Exemple 2.1 — Quart de tour direct de centre $\Omega(0, 0)$: envoie $M(x, y)$ sur $M'(-y, x)$.

Vérification. $\Omega M' = \sqrt{y^2 + x^2} = \Omega M$.

L'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})$: si $M(x, y) = r(\cos \alpha, \sin \alpha)$, alors $M'(-y, x) = r(-\sin \alpha, \cos \alpha) = r(\cos(\alpha + \pi/2), \sin(\alpha + \pi/2))$. Donc l'angle est $\pi/2$.

3. Composition de rotations

3.1 Composition de deux rotations de même centre

Théorème

Théorème 3.1 — La composée de deux rotations de **même centre** Ω et d'angles θ_1 et θ_2 est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta_1 + \theta_2$:

$$r_{(\Omega, \theta_2)} \circ r_{(\Omega, \theta_1)} = r_{(\Omega, \theta_1 + \theta_2)}.$$

Démonstration

Soit M un point, $M_1 = r_{(\Omega, \theta_1)}(M)$ et $M_2 = r_{(\Omega, \theta_2)}(M_1)$.

- $\Omega M_2 = \Omega M_1 = \Omega M$ (conservation des distances).
- L'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_2}) = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M_1}) + (\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M_2}) = \theta_1 + \theta_2$ (Chasles angulaire).

Donc $M_2 = r_{(\Omega, \theta_1 + \theta_2)}(M)$. □

Remarque

La composition n'est pas commutative en général pour des rotations de centres différents (résultat plus complexe : la composée est une rotation ou une translation). On se limite ici aux compositions de *même centre*.

3.2 Itération

Propriété

Propriété 3.1 — Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$r_{(\Omega, \theta)}^n = \underbrace{r_{(\Omega, \theta)} \circ \cdots \circ r_{(\Omega, \theta)}}_{n \text{ fois}} = r_{(\Omega, n\theta)}.$$

En particulier, si $\theta = \frac{2\pi}{n}$, alors $r_{(\Omega, \theta)}^n = \text{id}$ (rotation identité).

4. Applications

4.1 Polygones réguliers

Propriété

Propriété 4.1 — Un polygone régulier à n côtés (centre Ω) est invariant par la rotation $r_{(\Omega, 2\pi/n)}$.

Exemple. Le triangle équilatéral est invariant par $r_{(\Omega, 2\pi/3)}$; le carré par $r_{(\Omega, \pi/2)}$; l'hexagone régulier par $r_{(\Omega, \pi/3)}$.

4.2 Identification d'une rotation

Méthode

Pour reconnaître qu'une transformation f est une rotation et déterminer ses éléments :

- Vérifier que f conserve les distances (f isométrie).
- Vérifier que f conserve les angles orientés.
- Trouver le **centre** comme *point fixe* de f (i.e. $f(\Omega) = \Omega$).
- Déterminer l'**angle** en prenant $M \neq \Omega$ et calculant $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}})$.

Exemple

Exemple 4.1 — Soit f la transformation du plan définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Montrer que f est une rotation et préciser ses éléments.

Solution.

- **Point fixe** : $x = -y$ et $y = x$ donnent $x = -x$, soit $x = 0$, donc $y = 0$. Seul point fixe : $O(0, 0)$.
- **Image de $A(1, 0)$** : $A' = (0, 1)$. L'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}) = \frac{\pi}{2}$.

Vérification d'isométrie : $OA = 1 = OA'$. Donc $f = r_{(O, \pi/2)}$: quart de tour direct.

4.3 Lieu géométrique

Méthode

Pour déterminer un lieu géométrique impliquant une rotation, on exprime la condition par rapport à un point variable M et son image M' , puis on utilise les invariants ($\Omega M = \Omega M'$, angles).

Exemple

Exemple 4.2 — Soient A et B deux points fixes, et $\mathcal{R} = r_{(A, \pi/3)}$. Déterminer le lieu des points M tels que $\mathcal{R}(M)$ soit sur (AB) .

Solution. Notons $M' = \mathcal{R}(M)$. La condition $M' \in (AB)$ équivaut (puisque A est centre, A est fixé) à : $\overrightarrow{AM'}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Or $\overrightarrow{AM'} = \mathcal{R}_{\pi/3}(\overrightarrow{AM})$ (rotation autour de A d'angle $\pi/3$). Donc $\overrightarrow{AM'}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ colinéaire au vecteur obtenu en faisant tourner $\overrightarrow{AB}$ de $-\pi/3$ autour de A .

Le lieu est donc la droite passant par A et faisant un angle $-\pi/3$ avec (AB) .

5. Synthèse

5.1 Récapitulatif

Notion	Caractérisation
$r_{(\Omega, \theta)}(M) = M' \ (M \neq \Omega)$	$\Omega M' = \Omega M$ et $(\widehat{\Omega M}, \widehat{\Omega M'}) = \theta$
Cas $\theta = 0$	Identité
Cas $\theta = \pi$	Symétrie centrale en Ω
Cas $\theta = \pm\pi/2$	Quart de tour
Isométrie	$A'B' = AB$ pour tous A, B
Composition même centre	$r_{(\Omega, \theta_2)} \circ r_{(\Omega, \theta_1)} = r_{(\Omega, \theta_1 + \theta_2)}$
Réciproque	$r_{(\Omega, \theta)}^{-1} = r_{(\Omega, -\theta)}$
Itération	$r_{(\Omega, \theta)}^n = r_{(\Omega, n\theta)}$

5.2 Pièges classiques

Remarque

1. **Confondre rotation et symétrie axiale.** La rotation préserve l'orientation, pas la symétrie axiale.
2. **Sens des angles.** En géométrie, l'angle orienté est compté dans le sens trigonométrique (anti-horaire pour $\theta > 0$).
3. **Composition pour des centres différents.** En général $r_{\Omega_1} \circ r_{\Omega_2} \neq r_{\Omega_2} \circ r_{\Omega_1}$.
4. **Image d'un cercle.** Le centre est transformé, le rayon reste inchangé.
5. **Recherche du centre.** Seul le centre Ω est fixe ; pour tout autre point M , $r(M) \neq M$ (sauf si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$).

Fin du chapitre 8 – Rotation dans le plan