

Table des matières

1 Définition et rotation réciproque

Définition

Soient Ω un point du plan orienté direct et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- La **rotation** de centre Ω et d'angle α , notée $r(\Omega; \alpha)$, est la transformation du plan définie par : $r(\Omega) = \Omega$ et, pour tout $M \neq \Omega$, $r(M) = M'$ avec $\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha [2\pi]$.
- La **rotation réciproque** de $r(\Omega; \alpha)$ est $r^{-1} = r(\Omega; -\alpha)$. Pour tout M : $r(M) = M' \Leftrightarrow r^{-1}(M') = M$.
- Cas particuliers** : si $\alpha \equiv \pi [2\pi]$, r est la symétrie centrale de centre Ω ; si $\alpha \equiv 0 [2\pi]$, r est l'identité; sinon, Ω est l'unique point invariant.
- Si $r(M) = M'$ avec $M \neq \Omega$ et $\alpha \not\equiv 0 [2\pi]$, le triangle $\Omega M M'$ est isocèle de sommet Ω et Ω appartient à la médiatrice de $[MM']$.

Exemple

ABC est un triangle équilatéral et I est le milieu de $[BC]$. Compléter chaque image en précisant la rotation utilisée :

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none">$r\left(C, \frac{\pi}{3}\right)(A) = \dots$$r\left(A, -\frac{\pi}{3}\right)(C) = \dots$ | <ul style="list-style-type: none">$r\left(B, \frac{\pi}{3}\right)(C) = \dots$$r(I, \pi)(B) = \dots$ |
|--|--|

Application

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soient r_1 et r_2 les rotations de centre O et d'angles respectifs $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

- Déterminer $r_1(A)$, $r_1(B)$, $r_1(C)$ et $r_1(D)$.
- Déterminer $r_2(A)$, $r_2(B)$, $r_2(C)$ et $r_2(D)$.
- Que peut-on remarquer sur le lien entre r_1 et r_2 ?

2 Propriétés de la rotation

Propriété

Soit r une rotation d'angle α . Soient A, B, C, D, G, I des points du plan d'images respectives A', B', C', D', G', I' par r .

- Conservation de la distance** : $AB = A'B'$.
- Conservation de l'angle orienté** : si $A \neq B$, alors $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha [2\pi]$. Plus généralement, si $A \neq B$ et $C \neq D$: $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{C'D'}) [2\pi]$.
- Conservation du barycentre** : si $G = \text{bar}\{(A; \alpha_1), (B; \beta_1)\}$, alors $G' = \text{bar}\{(A'; \alpha_1), (B'; \beta_1)\}$. Cas particulier : si I est le milieu de $[AB]$, alors I' est le milieu de $[A'B']$. Cette propriété s'étend à 3 ou 4 points pondérés.
- Conservation de la colinéarité** : si $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$ ($k \in \mathbb{R}$), alors $\overrightarrow{A'C'} = k \overrightarrow{A'B'}$.

Exemple

On considère les configurations suivantes :

- 1 Un triangle ABC et, à l'extérieur de ce triangle, deux triangles équilatéraux MAB et NAC . Montrer que $MC = NB$.
- 2 Deux triangles rectangles isocèles OAB et OCD au sommet commun O tels que $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Montrer que $AC = BD$ et $(AC) \perp (BD)$.

Application

Soit ABC un triangle et $D = \text{bar}\{(B; 1), (C; 2)\}$. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1 Construire B' , C' et D' images respectives de B , C , D par r .
- 2 Montrer que B' , C' et D' sont alignés.

3 Images de figures par une rotation

Propriété

Soit r une rotation et A, B, O des points d'images A', B', O' ($A \neq B$).

- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$; celle de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.
- L'image du cercle $\mathcal{C}(O; R)$ est le cercle $\mathcal{C}'(O'; R)$ (même rayon).
- Les images de deux droites perpendiculaires (resp. parallèles) sont deux droites perpendiculaires (resp. parallèles).
- Si M est le point d'intersection de deux droites (D) et (Δ) , alors $r(M)$ est le point d'intersection des images de ces droites.

Exemple

$ABCD$ est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit E un point de $[BC]$ tel que $E \neq B$ et $E \neq C$, et F le point d'intersection de la droite (DC) et de la droite perpendiculaire à (AE) en A . Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1 Déterminer les images des deux droites (BC) et (AE) .
- 2 En déduire l'image de E par r .

Application

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit I le milieu de $[BC]$. On considère la rotation r de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre C passant par I .

- 1 Construire $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par r .
- 2 $(\mathcal{C})$ coupe $[AC]$ en E et $(\mathcal{C}')$ coupe $[AB]$ en F . Montrer que $r(E) = F$.

Exercice à la maison

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soient I, J tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$. Les droites (IC) et (JD) coupent respectivement (BD) et (AC) en M et N . Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 1 Déterminer $r(A)$ et $r(B)$.
- 2 Montrer que $I = \text{bar}\{(A; 1), (B; -3)\}$, puis que $r(I) = J$.
- 3 Déterminer l'image de (BD) et de (IC) par r , puis en déduire que $r(M) = N$.
- 4 Montrer que $IM = JN$ et $(CM) \perp (DN)$.