

Série d'exercices — Chapitre 3 : Les suites numériques

2^e BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1 — Suite récurrente affine + somme

Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{5}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$, puis étudier la monotonie de (u_n) . Conclure quant à la convergence.
2. On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que (v_n) est géométrique, puis exprimer u_n en fonction de n . Calculer $\lim u_n$.
3. Soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S_n = 2n - 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$. En déduire $\lim S_n$.

Exercice 2 — Suite récurrente rationnelle

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{5 - u_n}$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{5 - u_n}$, puis montrer par récurrence que $u_n < 3$.
2. On pose $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$.
 - (a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et exprimer v_n en fonction de n .
 - (b) Montrer que $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n}$, puis exprimer u_n en fonction de n .
 - (c) Calculer $\lim u_n$.

Exercice 3 — Suite homographique avec auxiliaire

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{6u_n}{1 + 15u_n}$.

1. Vérifier que $u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1 + 15u_n}$, puis montrer par récurrence que $u_n > \frac{1}{3}$.
2. Soit $v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$.
 - (a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et exprimer v_n en fonction de n .
 - (b) Montrer que $u_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$, puis calculer $\lim u_n$.

Exercice 4 — Convergence par majoration

Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$.

1. Calculer u_1 et montrer par récurrence que $u_n > 0$.
2. Montrer que $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$, puis en déduire $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$. Calculer $\lim u_n$.
3. Soit $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$. Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$. Exprimer v_n et u_n en fonction de n .

Exercice 5 — Convergence + transformation logarithmique

Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
2. Étudier la monotonie de (u_n) et en déduire que $u_n \geq \frac{1}{3}$ et que la suite converge.
3. Montrer que $1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(1 - u_n)$, puis $1 - u_n \leq \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n$. Calculer $\lim u_n$.
4. Soit $v_n = \frac{1 - u_n}{u_n}$. Montrer que (v_n) est géométrique, exprimer u_n en fonction de n , et retrouver $\lim u_n$.

Exercice 6 — Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq x$.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire $f(\mathbb{R}^+) = [0; 1[$.
3. Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 1$.
 - (b) Montrer que (u_n) est décroissante. Conclure quant à la convergence et déterminer la limite.

Exercice 7 — Suite homographique avec irrationnel

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}$.

1. Montrer par récurrence que (u_n) est strictement croissante et majorée par 2. En déduire la convergence et calculer la limite.
2. Soit $v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.
 - (a) Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser raison et premier terme.
 - (b) Exprimer u_n en fonction de n , puis retrouver $\lim u_n$.

Exercice 8 — Suite linéaire d'ordre 2

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \frac{7}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n.$$

On pose $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ et $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$.

1. Calculer v_0 et w_0 .
2. Montrer que (v_n) et (w_n) sont géométriques de raisons respectives $\frac{1}{3}$ et 2.
3. Exprimer v_n et w_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n . Calculer $\lim u_n$.

Exercice 9 — Étude f + suite récurrente

Soit f définie par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$.

1. Déterminer D_f .

2. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2(\sqrt{x} - 1)^2}$. Dresser le tableau de variations.
3. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) - x = \frac{x(4 - x)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$. En déduire que pour tout $x \in [4; +\infty[$, $f(x) \leq x$.
4. Soit (u_n) définie par $u_0 = 9$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 4$.
 - (b) Étudier la monotonie de (u_n) et conclure quant à la convergence. Déterminer la limite.

Exercice 10 — Étude complète + suite + auxiliaire

Soit f définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \right)^2$.

1. Étudier les variations de f sur $[0; 4]$ et montrer que $f([0; 4]) \subset [0; 4]$.
2. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4$.
 - (b) Montrer que (u_n) est strictement croissante, et en déduire qu'elle converge.
3. Soit $v_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}}$.
 - (a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 - (b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
 - (c) Calculer $\lim u_n$.