

Table des matières

1 Rappels (1BAC)

Définition

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

- **Majorée** : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in I, u_n \leq M$. **Minorée** : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in I, m \leq u_n$. **Bornée** : majorée et minorée.
- **Croissante** (resp. **décroissante**, **constante**) : $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $\leq, =$) pour tout $n \in I$.
- **Arithmétique** de raison r : $u_{n+1} = u_n + r$. Terme général : $u_n = u_p + (n - p)r$. Somme : $\sum_{k=p}^n u_k = \frac{(n - p + 1)(u_p + u_n)}{2}$.
- **Géométrique** de raison q : $u_{n+1} = q \cdot u_n$. Terme général : $u_n = u_p \cdot q^{n-p}$. Somme (pour $q \neq 1$) : $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \cdot \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$.

Exemple

On considère les suites suivantes :

- $u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ pour $n \geq 2$;
- $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$;
- $w_n = \frac{2n-1}{n+4}$ pour $n \geq 0$;
- (t_n) géométrique avec $t_2 = 3/16$ et $t_5 = 3/1024$.

- 1 Montrer que (u_n) est majorée par $\sqrt{2}$ et minorée par 0.
- 2 Montrer que (v_n) est arithmétique. Donner sa raison et exprimer v_n .
- 3 Étudier la monotonie de (w_n) .
- 4 Pour (t_n) , déterminer la raison q et exprimer t_n .

Application

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n}$. On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

- 1 Montrer que (v_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
- 2 Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

2 Limite d'une suite numérique

Définition

Soit (u_n) une suite numérique et $\ell \in \mathbb{R}$.

- (u_n) **converge vers** ℓ , noté $\lim u_n = \ell$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. *La limite, si elle existe, est unique.*
- (u_n) **diverge vers** $+\infty$ si tout intervalle $]A, +\infty[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang; définition analogue pour $-\infty$.

Propriété

Limites de référence :

- $\lim \frac{1}{n^p} = 0$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.
- $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
- $\lim n^p = +\infty$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.
- $\lim \sqrt{n} = +\infty$.
- $(\cos n)$ et $((-1)^n)$ n'ont pas de limite.

Suites particulières.

- Pour $u_n = q^n$: si $q > 1$, $\lim = +\infty$; si $q = 1$, $\lim = 1$; si $|q| < 1$, $\lim = 0$; si $q \leq -1$, pas de limite.
- Pour $u_n = n^r$ ($r \in \mathbb{Q}^*$) : si $r > 0$, $\lim = +\infty$; si $r < 0$, $\lim = 0$.

Propriété

Opérations sur les limites : les règles classiques pour somme, produit, inverse et quotient s'appliquent. Formes indéterminées : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim \frac{n+2}{n-8}$

3 $\lim \frac{2^n - 3^n}{2^n}$

5 $\lim n^{0,5}$

2 $\lim \sqrt{n^2 - 3n + 2} - n$

4 $\lim \frac{5^n - 3^n}{2^n + 5^n}$

6 $\lim \frac{1}{\sqrt{n} - n}$

Application

Calculer $\lim 2 - \left(\frac{-7}{9}\right)^n$ et $\lim n^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

À faire à la maison

1 Calculer les limites suivantes :

a. $\lim \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}}{1}$

c. $\lim \frac{4^n + 5^n}{4^n - 5^n}$

b. $\lim \frac{n^3 + 2n - 1}{2n^3 - 5n^2 + 1}$

d. $\lim n - \sqrt{n^2 + 3n + 1}$

2 Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + 2$. Démontrer par la définition que $\lim u_n = 2$.

3 Limite et relation d'ordre

Propriété

Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) trois suites et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

- **Conservation de l'ordre** : si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim u_n = \ell$, $\lim v_n = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$. *Attention* : l'inégalité *stricte* ne se conserve pas.
- **Théorème de comparaison** : si $|u_n - \ell| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = \ell$.
- **Théorème des gendarmes** : si $w_n \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim w_n = \lim v_n = \ell$, alors $\lim u_n = \ell$.
- **Critères de divergence** : si $v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang et $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$ (idem pour $-\infty$ avec $\leq$).
- **Convergence monotone** : toute suite croissante majorée est convergente ; toute suite décroissante minorée est convergente.
- **Divergence monotone** : toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$; toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Exemple

On considère les suites suivantes :

- $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} + 2$;
- $w_n = \cos n - 2n - 1$;
- $v_n = \frac{\sin n}{n^3 + 1}$;
- $t_n = 3n + 5 \sin n$.

- 1 Pour (u_n) et (v_n) , encadrer la suite et en déduire sa limite.
- 2 Pour (w_n) et (t_n) , comparer avec une suite de référence et en déduire la limite.

Application

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}$.

- 1 Montrer que (u_n) est minorée par 3 et majorée par 4.
- 2 Montrer que (u_n) est croissante.
- 3 En déduire que (u_n) converge.

À faire à la maison

- 1 Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{n + (-1)^n \sin n}{n^2 + 1}$. Démontrer que $\lim u_n = 0$ par le théorème des gendarmes.
- 2 Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}$.
 - a. Montrer par récurrence que $u_n \in [0; 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - b. Étudier la monotonie de (u_n) .
 - c. Conclure quant à la convergence et calculer la limite éventuelle.

4 Suites de la forme $f(u_n)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété

Soit f une fonction et (u_n) une suite numérique.

- **Limite de $f(u_n)$** : si $\lim u_n = \ell$ et f est continue en ℓ , alors $\lim f(u_n) = f(\ell)$.
- **Limite d'une suite récurrente** : si f continue sur un intervalle I stable par f (c.-à-d. $f(I) \subset I$), $u_{n_0} \in I$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et (u_n) converge, alors la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Exemple

On considère les suites suivantes :

- $u_n = \frac{\cos n}{n}$ pour $n > 0$, et $f(x) = \frac{x+1}{3+2x}$;
- $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \sqrt{\frac{1+v_n}{2}} \end{cases}$ avec $f(x) = \sqrt{(1+x)/2}$ sur $[0; 1]$.

- 1 Calculer $\lim u_n$ et en déduire $\lim f(u_n)$.
- 2 Étudier les variations de f sur $[0; 1]$ pour la deuxième suite et montrer que $f([0; 1]) \subset [0; 1]$.
- 3 Montrer que (v_n) est croissante et bornée. En déduire la limite de (v_n) .

Application

Soit $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1 Étudier les variations de f et déterminer $f([0; 2])$.
- 2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0; 2]$, que (u_n) est croissante, et calculer sa limite.

Exercice à la maison

Soit $f(x) = \frac{5x-1}{x+3}$ et (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1 Calculer $f([1; 2])$ et résoudre $f(x) = x$.
- 2 Montrer que $u_n \in [1; 2]$ pour tout n , étudier les variations de (u_n) , et déterminer sa limite.

À faire à la maison

Soit $f(x) = \sqrt{x+2}$ et (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1 Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
- 2 Vérifier que $f([0; 2]) \subset [0; 2]$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 2]$.
- 3 Résoudre dans $[0; 2]$ l'équation $f(x) = x$.
- 4 Étudier la monotonie de (u_n) et conclure.
- 5 Démontrer que $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - 2|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire $\lim u_n$.