

Série d'exercices — Suites numériques

1^{ère} BAC SX BIOF

En. Nidal SABI

Exercice 1

Calculer les trois premiers termes de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{n^2 + 1}{n + 2}, n \in \mathbb{N}.$

3. $w_n = (-1)^n \cdot 2^n.$

2. $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} t_0 = 1, t_1 = 2 \\ t_{n+2} = t_{n+1} + t_n \end{cases}.$

Exercice 2

Étudier la monotonie de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{n}{n + 1}.$

3. $w_n = n^2 - 5n.$

2. $v_n = \frac{1}{2^n}.$

4. $t_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}.$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 .
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$.
3. Étudier la monotonie de (u_n) .

Exercice 4

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que $u_2 = 5$ et $u_8 = 23$.

1. Calculer r et u_0 .
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Calculer la somme $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{50}$.

Exercice 5

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q telle que $v_1 = 6$ et $v_4 = 162$.

1. Calculer q et v_0 .
2. Exprimer v_n en fonction de n .
3. Calculer la somme $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}$.

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $v_n = u_n - 2$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
4. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$.
2. On pose $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 4}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 8

Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, 5^n - 1$ est divisible par 4.
3. $\forall n \geq 4, 2^n \geq n^2$.

Exercice 9

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $r = -3$.

1. À partir de quel rang n a-t-on $u_n \leq 0$?
2. À partir de quel rang n a-t-on $u_n \leq -50$?

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 .
2. On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que (v_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 11

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 .
2. Montrer que $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$.
3. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 1.

Exercice 12

Une bille tombe d'une hauteur de 10 mètres et rebondit. À chaque rebond, elle remonte aux $\frac{4}{5}$ de la hauteur précédente. Soit h_n la hauteur atteinte après le n -ième rebond.

1. Justifier que (h_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. Calculer la hauteur atteinte après le 5-ième rebond.
3. Calculer la distance totale parcourue par la bille.