

Série d'exercices N°4

Suites Numériques

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Consignes. Pour toute monotonie, justifier par le signe de $u_{n+1} - u_n$, par le rapport u_{n+1}/u_n , par étude de fonction, ou par récurrence. Pour toute somme géométrique, vérifier $q \neq 1$.

Couverture. 12 exercices : calculs de termes, monotonie, bornes, suites arithmétiques, géométriques, sommes, suites récurrentes, suites auxiliaires.

I. Calculs et monotonie

Exercice 1 *Calculs de termes*

1. Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1}$ pour $n \geq 0$. Calculer u_0, u_1, u_5, u_{10} .
2. Soit (v_n) définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \frac{v_n + 3}{v_n + 1}$. Calculer v_1, v_2, v_3 .
3. Soit (w_n) définie par $w_0 = 0, w_1 = 1, w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n$. Calculer w_2, w_3, w_4 . Conjecturer une formule explicite et la démontrer par récurrence.

Exercice 2 *Étude de monotonie*

Étudier la monotonie des suites suivantes en utilisant la méthode adaptée.

1. $u_n = n^2 - 6n + 5$, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_n = \frac{n + 1}{n + 2}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_n = \frac{3^n}{n + 1}$, pour $n \in \mathbb{N}$ (*indication* : étudier u_{n+1}/u_n).
4. $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$, pour $n \in \mathbb{N}$ (*indication* : quantité conjuguée).
5. (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n}$ (montrer par récurrence que $u_n > 0$, puis comparer u_{n+1} et u_n).

II. Suites majorées, minorées, bornées

Exercice 3 *Bornes*

1. Montrer que la suite $u_n = \frac{n}{n + 1}$ est bornée, et préciser des bornes optimales.
2. Soit (v_n) définie par $v_0 = 0, v_{n+1} = \frac{v_n + 4}{2}$.
 - (a) Montrer par récurrence que $0 \leq v_n \leq 4$.
 - (b) Montrer que (v_n) est croissante.
3. Soit $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 2$. Montrer que (u_n) est bornée et préciser un majorant et un minorant.

III. Suites arithmétiques

Exercice 4 *Identification et formule*

1. Montrer que la suite $u_n = 7 - 4n$ est arithmétique. Préciser u_0 et la raison.
2. Soit (u_n) arithmétique avec $u_4 = -2$ et $u_{10} = 16$. Déterminer u_0 et r . Calculer u_{50} .
3. Soit (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 2$. À partir de quel rang n a-t-on $u_n \geq 100$?

Exercice 5 *Sommes arithmétiques*

1. Calculer $S_1 = 3 + 7 + 11 + 15 + \cdots + 99$.
2. Calculer $S_2 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 1000$.
3. Calculer la somme des entiers impairs entre 1 et 199 inclus.
4. Soit (u_n) arithmétique avec $u_0 = 1$, raison $r = 2$. Trouver n tel que $\sum_{k=0}^n u_k = 2500$.

IV. Suites géométriques

Exercice 6 *Identification et formule*

1. Montrer que la suite $u_n = 3 \cdot 2^n$ est géométrique. Préciser u_0 et la raison.
2. Soit (u_n) géométrique à termes positifs avec $u_2 = 18$ et $u_5 = 486$. Déterminer u_0 et q . Calculer u_{10} .
3. Soit (u_n) géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 256$. Trouver n tel que $u_n \leq 1$.

Exercice 7 *Sommes géométriques*

1. Calculer $S_1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$.
2. Calculer $S_2 = \sum_{k=0}^8 3^k$.
3. Calculer $S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots + \frac{(-1)^{10}}{3^{10}}$.
4. Calculer $S_4 = \sum_{k=1}^{20} 5 \cdot 2^k$.

V. Récurrences et suites auxiliaires

Exercice 8 *Suite auxiliaire arithmétique*

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + (2n + 1)$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 .
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - n^2$ est constante.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 9 *Suite auxiliaire géométrique*

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 .
2. Soit (v_n) définie par $v_n = u_n + 3$. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
4. Calculer $\sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .

VI. Problèmes de synthèse**Exercice 10** *Suite récurrente non-classique*

Soit (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$.

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n .
2. Montrer par récurrence que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 0$.
3. Montrer que (u_n) est décroissante.

Exercice 11 *Application concrète – placement à intérêts composés*

On place un capital initial $C_0 = 10\,000$ dirhams au taux annuel 4,5% (intérêts composés annuellement). On note C_n le capital après n années.

1. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n . Reconnaître la nature de la suite (C_n) .
2. Exprimer C_n en fonction de n .
3. Au bout de combien d'années le capital aura-t-il *doublé* ?