

Suites Numériques

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 10h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : raisonnement par récurrence (chapitre 1), fonctions numériques (chapitre 3), notion de proportionnalité.

Capacités attendues : utiliser le raisonnement par récurrence ; étudier une suite (sens de variation, majorations, monotonie) ; reconnaître une suite arithmétique ou géométrique ; calculer la somme de n termes consécutifs ; reconnaître et exploiter des situations modélisées par ces suites.

Table des matières

1	Notion de suite numérique	2
1.1	Définition	2
1.2	Modes de définition d'une suite	2
1.3	Représentation graphique	2
2	Monotonie d'une suite	3
2.1	Définitions	3
2.2	Méthodes d'étude de la monotonie	3
3	Suites majorées, minorées, bornées	4
4	Suites arithmétiques	5
4.1	Définition	5
4.2	Terme général	5
4.3	Monotonie	5
4.4	Somme de n termes consécutifs	5
5	Suites géométriques	7
5.1	Définition	7
5.2	Terme général	7
5.3	Monotonie	7
5.4	Somme de n termes consécutifs	7
5.5	Caractérisation d'une suite arithmétique ou géométrique	8
6	Synthèse	9
6.1	Tableau récapitulatif	9
6.2	Pièges classiques	9

1. Notion de suite numérique

1.1 Définition

Définition

Définition 1.1 — Une **suite numérique** est une application $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est une partie de $\mathbb{N}$ (typiquement $I = \mathbb{N}$ ou $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$).

L'image de n par u se note u_n (et non $u(n)$). On dit que u_n est le **terme général** ou **terme d'indice n** de la suite, qu'on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) .

1.2 Modes de définition d'une suite

Méthode

Une suite peut être définie de plusieurs façons :

1. **Forme explicite** : $u_n = f(n)$ où f est une fonction de la variable réelle.
2. **Par récurrence** : un *terme initial* u_0 (ou u_{n_0}) et une *relation* $u_{n+1} = g(u_n)$ (récurrence d'ordre 1).
3. **Par récurrence d'ordre 2** : termes initiaux u_0, u_1 et relation $u_{n+2} = g(u_n, u_{n+1})$.

Exemple

Exemple 1.1 — Quelques suites usuelles.

- **Explicite** : $u_n = 2n + 1$ (suite des entiers impairs : 1, 3, 5, 7, ...).
- **Par récurrence d'ordre 1** : $u_0 = 1, u_{n+1} = 2u_n + 3$.

Les premiers termes : $u_1 = 5, u_2 = 13, u_3 = 29$.

- **Par récurrence d'ordre 2** (suite de Fibonacci) : $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Les premiers termes : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

1.3 Représentation graphique

Remarque

On représente graphiquement une suite par les points (n, u_n) dans le plan. Pour une suite définie par $u_n = f(n)$, ce sont les points de la courbe de f aux abscisses entières.

2. Monotonie d'une suite

2.1 Définitions

Définition

Définition 2.1 — Soit (u_n) une suite.

- (u_n) est **croissante** si $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est **strictement croissante** si $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} > u_n$.
- (u_n) est **décroissante** si $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) est **constante** (ou **stationnaire**) si $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u_{n+1} = u_n$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

2.2 Méthodes d'étude de la monotonie

Méthode

Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n) , on dispose de plusieurs techniques :

(M1) Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$.

Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n , alors (u_n) est croissante.

(M2) Comparaison du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (si tous les termes sont strictement positifs).

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors (u_n) est croissante.

(M3) Pour une suite explicite $u_n = f(n)$.

Étudier la monotonie de la fonction f sur $[n_0, +\infty[$.

(M4) Par récurrence.

Démontrer par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n .

Exemple

Exemple 2.1 — Étudier la monotonie de $u_n = n^2 - 5n + 1$.

Solution. On calcule $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 5(n+1) + 1 - (n^2 - 5n + 1) = 2n - 4$.

- Si $n \geq 2$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite est croissante à partir de $n = 2$.
- Si $n \leq 1$: $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite est décroissante.

Donc la suite n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$ entier, mais croissante à partir de $n = 2$.

Exemple

Exemple 2.2 — Étudier la monotonie de $u_n = \frac{2^n}{n!}$ pour $n \geq 1$.

Solution. Les termes sont positifs ; étudions le rapport.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}.$$

- Si $n = 1$: rapport = 1, donc $u_2 = u_1 = 2$.
- Si $n + 1 \geq 3$, c'est-à-dire $n \geq 2$: rapport < 1 (décroissance).

On a $u_1 = u_2 = 2$, puis (u_n) est strictement décroissante à partir de $n = 2$.

3. Suites majorées, minorées, bornées

Définition

Définition 3.1 — Soit (u_n) une suite.

- (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq M$. M est appelé un **majorant**.
- (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \geq m$. m est un **minorant**.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. De manière équivalente : il existe $K \geq 0$ tel que $|u_n| \leq K$ pour tout n .

Exemple

Exemple 3.1 — La suite $u_n = \frac{n}{n+1}$ est bornée.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Comme $\frac{1}{n+1} > 0$, on a $u_n < 1$. Et comme $\frac{1}{n+1} \leq 1$ (car $n+1 \geq 1$), on a $u_n \geq 0$. Donc $0 \leq u_n < 1 : (u_n)$ est bornée.

Méthode

Pour démontrer qu'une suite est majorée/minorée, on peut :

1. Manipuler l'expression de u_n (factorisation, encadrement).
2. Démontrer par récurrence sur n .
3. Utiliser la monotonie : une suite croissante est minorée par son premier terme ; une suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exemple

Exemple 3.2 — Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrer par récurrence que $1 \leq u_n < 2$.

Démonstration par récurrence. Posons $P(n) : 1 \leq u_n < 2$.

Init. $u_0 = 1 \in [1, 2)$. OK.

Hér. Supposons $1 \leq u_n < 2$. Alors $3 \leq u_n + 2 < 4$, donc $\sqrt{3} \leq u_{n+1} < 2$. Or $\sqrt{3} \geq 1$ (car $\sqrt{3} \approx 1,73 > 1$), donc $1 \leq u_{n+1} < 2$. OK.

Concl. (u_n) est bornée et $1 \leq u_n < 2$ pour tout n . □

4. Suites arithmétiques

4.1 Définition

Définition

Définition 4.1 — Une suite (u_n) est **arithmétique** de **raison** $r \in \mathbb{R}$ s'il existe r tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

La raison r est la différence constante entre deux termes consécutifs.

4.2 Terme général

Propriété

Propriété 4.1 — Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . Alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = u_0 + nr.$$

Plus généralement, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$: $u_n = u_p + (n - p)r$.

Démonstration

Par récurrence sur n . $P(n) : u_n = u_0 + nr$.

Init. $u_0 = u_0 + 0 \cdot r$. OK.

Hér. Si $u_n = u_0 + nr$, alors $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n + 1)r$. OK.

Concl. La formule est vraie pour tout n . La forme générale $u_n = u_p + (n - p)r$ s'en déduit en éliminant u_0 . $\square$

4.3 Monotonie

Propriété

Propriété 4.2 — Soit (u_n) arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$: (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$: (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$: (u_n) est constante.

4.4 Somme de n termes consécutifs

Théorème

Théorème 4.1 — Soit (u_n) une suite arithmétique. La somme de $n + 1$ termes consécutifs vaut :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n + 1) \cdot \frac{u_0 + u_n}{2} = \frac{(\text{nombre de termes}) \cdot (\text{premier} + \text{dernier})}{2}.$$

Plus généralement, pour $p \leq q$:

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q = (q - p + 1) \cdot \frac{u_p + u_q}{2}.$$

Démonstration

On écrit la somme deux fois, une fois croissante, une fois décroissante :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

$$S = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_1 + u_0$$

En additionnant terme à terme : chaque colonne donne $u_k + u_{n-k} = u_0 + u_n$ (somme constante pour une suite arithmétique : $u_k + u_{n-k} = (u_0 + kr) + (u_0 + (n-k)r) = 2u_0 + nr = u_0 + u_n$). D'où $2S = (n+1)(u_0 + u_n)$, soit $S = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$. $\square$

Exemple

Exemple 4.1 — Calculer $S = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 100$.

Solution. Suite arithmétique de premier terme 1, raison 3. Le terme 100 correspond à $u_n = 1 + 3n = 100$, soit $n = 33$. Donc $n + 1 = 34$ termes.

$$S = 34 \cdot \frac{1 + 100}{2} = 34 \cdot \frac{101}{2} = 17 \cdot 101 = 1717.$$

5. Suites géométriques

5.1 Définition

Définition

Définition 5.1 — Une suite (u_n) est **géométrique** de **raison** $q \in \mathbb{R}$ s'il existe q tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = q \cdot u_n.$$

Si $u_0 \neq 0$ et $q \neq 0$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant égal à q .

5.2 Terme général

Propriété

Propriété 5.1 — Soit (u_n) géométrique de premier terme u_0 et raison q . Alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = u_0 \cdot q^n.$$

Plus généralement : $u_n = u_p \cdot q^{n-p}$.

5.3 Monotonie

Propriété

Propriété 5.2 — Soit (u_n) géométrique avec $u_0 > 0$ et $q > 0$.

- Si $q > 1$: (u_n) est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$: (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$: (u_n) est constante.

Si $u_0 > 0$ et $q < 0$, la suite n'est *pas monotone* (alternance de signes).

5.4 Somme de n termes consécutifs

Théorème

Théorème 5.1 — Soit (u_n) géométrique de raison $q \neq 1$. La somme de $n + 1$ termes consécutifs vaut :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration

On note $S = u_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$. Posons $T = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.
Alors $qT = q + q^2 + \cdots + q^{n+1}$, d'où $T - qT = 1 - q^{n+1}$, soit $T(1 - q) = 1 - q^{n+1}$.

Comme $q \neq 1$, $T = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. D'où la formule. □

Exemple

Exemple 5.1 — Calculer $S = 2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 4374$.

Solution. Suite géométrique : $u_0 = 2$, $q = 3$. Le terme $u_n = 2 \cdot 3^n = 4374$ donne $3^n = 2187 = 3^7$, soit $n = 7$. Donc 8 termes.

$$S = 2 \cdot \frac{1 - 3^8}{1 - 3} = 2 \cdot \frac{1 - 6561}{-2} = 2 \cdot \frac{-6560}{-2} = 6560.$$

5.5 Caractérisation d'une suite arithmétique ou géométrique**Méthode**

Pour reconnaître :

- **Suite arithmétique** : $u_{n+1} - u_n$ *constant* (ne dépend pas de n).
- **Suite géométrique** : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *constant* (si défini).

Exemple

Exemple 5.2 — La suite $u_n = 5n + 7$ est-elle arithmétique ?

Solution. $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 7 - (5n + 7) = 5$, constant. Oui, arithmétique de raison 5, premier terme $u_0 = 7$.

Application

1. Soit (u_n) arithmétique avec $u_3 = 7$ et $u_8 = 22$. Déterminer u_0 et r . En déduire u_{20} .
2. Soit (v_n) géométrique avec $v_2 = 12$ et $v_5 = 96$. Déterminer v_0 et q . Calculer $\sum_{k=0}^{10} v_k$.
3. Calculer $S = 100 + 95 + 90 + \dots + 5$.
4. Calculer $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{10}}{2^{10}}$.

6. Synthèse

6.1 Tableau récapitulatif

	Arithmétique	Géométrique
Réurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$
Terme général	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 q^n$
Caractérisation	$u_{n+1} - u_n$ constant	$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ constant ($\neq 0$)
Monotonie	$r > 0$: croissante $r < 0$: décroissante	$u_0, q > 0$ et $q > 1$: croissante $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$: décroissante
Somme $u_0 + \dots + u_n$	$\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$	$u_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (si $q \neq 1$)

6.2 Pièges classiques

Remarque

1. **Confondre raison arithmétique et raison géométrique.**
2. **Indices et nombre de termes.** La somme $u_p + u_{p+1} + \dots + u_q$ compte $q - p + 1$ termes.
3. **Formule de somme géométrique avec $q = 1$.** La formule générale ne s'applique pas pour $q = 1$: si $q = 1$, la suite est constante et la somme vaut $(n+1)u_0$.
4. **Suite récurrente non-arithmétique-géométrique.** Toutes les suites n'ont pas de formule explicite simple.
5. **Monotonie de suite géométrique à raison négative.** Il y a alternance, donc pas de monotonie.