

Table des matières

1	Généralités sur les suites numériques	2
2	Suites majorées, minorées, bornées	2
3	Monotonie d'une suite	3
4	Suite arithmétique	4
5	Suite géométrique	5

1 Généralités sur les suites numériques

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq p\}$.

- Toute fonction numérique u définie sur I est appelée **suite numérique**. L'image par u d'un entier $n \in I$ est notée u_n , et l'on appelle u_n le **terme général** de la suite. On note $(u_n)_{n \in I}$ ou $(u_n)_{n \geq p}$.
- Une suite peut être définie de deux manières :
 - **Explicitement** par son terme général en fonction de n (ex. $u_n = 2^n - 1$).
 - **Récurrente** par son ou ses premiers termes et une relation de récurrence (ex. $u_0 = 1, u_{n+1} = 2u_n + 3$).

Exemple

On considère les suites :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $u_n = 2 + \frac{3}{n}$;
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{1 + v_n} \end{cases}$;
- $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\begin{cases} w_0 = 2, w_1 = -1 \\ w_{n+2} = 2w_{n+1} + w_n \end{cases}$

- 1 Calculer les trois premiers termes de (u_n) , (v_n) et (w_n) .
- 2 Exprimer u_{n+1} , $u_n + 1$, u_{2n} et u_{2n+1} en fonction de n .
- 3 Trouver l'indice n tel que $u_n = \frac{43}{21}$.
- 4 Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2}{2n+1}$.

Application

Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \cdot n + 1$.

- 1 Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .
- 2 Donner l'expression de u_{2n} et de u_{2n+1} en fonction de n .

2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

- (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in I, u_n \leq M$.
- (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in I, u_n \geq m$.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. De manière équivalente : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in I, |u_n| \leq M$.

Exemple

On considère les suites :

- $u_n = \frac{n+4}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$;
- $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n + \frac{4}{5} \end{cases}$;
- $w_n = 2 \cos(n^2 + 2) + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1 Montrer que $1 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2 Montrer par récurrence que la suite (v_n) est minorée par 1.
- 3 Montrer que la suite (w_n) est bornée. Donner un majorant et un minorant.

Application

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{u_n} \end{cases}$.

- 1 Calculer u_1 et u_2 .
- 2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3$.

Exercice à la maison

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$.

3 Monotonie d'une suite

Définition

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

- (u_n) est **croissante** si $\forall n \in I, u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est **décroissante** si $\forall n \in I, u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) est **constante** si $\forall n \in I, u_{n+1} = u_n$.

Conséquence. Si $(u_n)_{n \geq p}$ est croissante, alors $u_n \geq u_p$ pour tout $n \geq p$; si elle est décroissante, $u_n \leq u_p$.

Exemple

Étudier la monotonie des suites suivantes :

- $x_n = 2n - 3$
- $y_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$
- $u_n = \frac{3}{n+1}$
- $u_n = n^2 + 2n$
- $u_n = \sqrt{n+1}$
- $u_n = (-1)^n$

Application

Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n} \end{cases}.$$

- 1 Calculer u_1 et u_2 .
- 2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 3$.
- 3 Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(u_n - 3)}{u_n}$.
- 4 Étudier la monotonie de (u_n) et en déduire que $u_n \leq 6$ pour tout n .

Exercice à la maison

Soit (v_n) la suite définie par
$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(v_n + \frac{4}{v_n} \right) \end{cases}.$$

- 1 Calculer v_1 et v_2 .
- 2 Montrer que (v_n) est minorée par 2.
- 3 Étudier la monotonie de (v_n) .
- 4 En déduire que (v_n) est majorée par 3.

4 Suite arithmétique

Définition

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est **arithmétique** de raison $r \in \mathbb{R}$ si $\forall n \in I, u_{n+1} = u_n + r$.

Propriété

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p .

- **Terme général** : $u_n = u_p + (n - p) \cdot r$ pour tout $n \geq p$. En particulier, si $p = 0$: $u_n = u_0 + n \cdot r$.
- **Somme des termes consécutifs** : pour $p \leq n$,

$$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}.$$

Exemple

On considère les suites arithmétiques suivantes :

- (u_n) avec $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$;
- (v_n) avec $v_3 = 2$ et $v_7 = 14$.

- 1 Déterminer la raison et le premier terme de chacune.
- 2 Exprimer u_n et v_n en fonction de n .
- 3 Calculer la somme $S = v_4 + v_5 + \cdots + v_{25}$.

Application

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_1 = 5$ et $r = 2$.

- 1 Calculer u_5 , u_{10} et u_{100} .
- 2 Déterminer le terme général de la suite (u_n) .
- 3 203 est-il un terme de la suite (u_n) ?

Exercice à la maison

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}$. On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

- 1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
- 2 Étudier la monotonie de (u_n) .
- 3 Montrer que (v_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
- 4 Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- 5 Calculer $S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

5 Suite géométrique

Définition

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est **géométrique** de raison $q \in \mathbb{R}$ si $\forall n \in I, u_{n+1} = q \cdot u_n$.

Propriété

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p .

- **Terme général** : $u_n = u_p \cdot q^{n-p}$ pour tout $n \geq p$. En particulier, si $p = 0$: $u_n = u_0 \cdot q^n$.
- **Somme des termes consécutifs** : pour $p \leq n$,

$$S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \begin{cases} u_p \cdot \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n - p + 1) \cdot u_p & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

- Cas particulier : pour $q \neq 1, 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Exemple

On considère les suites suivantes :

- $u_n = -7 \times 5^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$;
- (w_n) géométrique avec $w_2 = \frac{3}{16}$ et $w_5 = \frac{3}{1024}$;
- $v_n = n^2 + 5$ pour $n \in \mathbb{N}$;
- (t_n) géométrique avec $q = 3$ et $t_4 = 12$.

- 1 Pour (u_n) et (v_n) , dire (avec justification) si elles sont géométriques.
- 2 Pour (w_n) , déterminer la raison q et exprimer w_n en fonction de n .
- 3 Pour (t_n) , calculer la somme $S = t_4 + t_5 + \dots + t_{2026}$.

Application

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 \end{cases}$. On pose $v_n = u_n + 3$.

- 1 Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
- 2 Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice à la maison

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$. On pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

- 1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 1$. En déduire la monotonie de (u_n) .
- 2 Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
- 3 Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- 4 Calculer $S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.