

Série d'exercices N°5 (S2)

Vecteurs de l'espace

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Consignes. Pour les colinéarités et coplanarités, donner systématiquement les coefficients de combinaison linéaire. Pour les déterminants, détailler le calcul.

Couverture. 8 exercices : calcul vectoriel, colinéarité, coplanarité, déterminants, problèmes géométriques.

I. Calcul vectoriel et colinéarité

Exercice 1 *Calcul vectoriel*

$ABCDEFGH$ est un cube. On note I le milieu de $[EH]$ et J le milieu de $[CG]$.

1. Exprimer $\vec{AI}$ et $\vec{AJ}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$.
2. Exprimer $\vec{IJ}$.
3. Démontrer que IJ et BD sont parallèles.

Exercice 2 *Colinéarité par coordonnées*

Dans un repère, soient $\vec{u}(2, -3, 1)$, $\vec{v}(4, -6, 2)$, $\vec{w}(2, -3, 0)$.

1. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.
3. Trouver λ pour que $\vec{u}$ et $(\lambda, -3, 1)$ soient colinéaires.

Exercice 3 *Alignement*

Soient $A(1, 2, 3)$, $B(4, 5, 6)$, $C(7, 8, 9)$. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

II. Coplanarité

Exercice 4 *Test par combinaison linéaire*

Soient $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(2, -1, 3)$, $\vec{w}(0, 5, -5)$.

1. Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Conclure.

Exercice 5 *Test par déterminant*

1. Calculer le déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ pour $\vec{u}(1, 0, 2)$, $\vec{v}(2, 1, 1)$, $\vec{w}(0, 1, -3)$. Sont-ils coplanaires ?
2. Idem pour $\vec{u}(1, 1, 1)$, $\vec{v}(2, 3, -1)$, $\vec{w}(3, 4, 0)$.
3. Trouver $m \in \mathbb{R}$ pour que $\vec{u}(1, m, 2)$, $\vec{v}(2, 1, m)$, $\vec{w}(m, 0, 1)$ soient coplanaires.

Exercice 6 *Quatre points coplanaires*

Soient $A(0, 1, 1)$, $B(2, 0, 3)$, $C(1, 2, 0)$, $D(3, 1, 2)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
2. Les quatre points sont-ils coplanaires ?

III. Problèmes géométriques**Exercice 7** *Tétraèdre et milieux*

$ABCD$ est un tétraèdre. On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$, et K, L les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

1. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ en fonction des arêtes du tétraèdre.
2. Démontrer que $IKJL$ est un parallélogramme.
3. En déduire que (IJ) et (KL) se coupent en leur milieu commun.

Exercice 8 *Centre de gravité d'un tétraèdre*

Soit $ABCD$ un tétraèdre et G son **centre de gravité** (isobarycentre des sommets).

1. Justifier l'existence de G et exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
2. Soit I le centre de gravité du triangle BCD . Démontrer que $G \in (AI)$ et que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$.
3. En déduire la concurrence des quatre médianes du tétraèdre.

Fin de la série – Vecteurs de l'espace