

Vecteurs de l'espace

1^{ère} Année Baccalauréat – Sciences Mathématiques

Volume horaire officiel : 5h (cf. répartition 2013) – **Pré-requis** : calcul vectoriel dans le plan, géométrie de l'espace (collège).

Capacités attendues : maîtriser les règles du calcul vectoriel dans l'espace ; reconnaître et exprimer la colinéarité de deux vecteurs ; reconnaître et exprimer la coplanarité de trois vecteurs ; appliquer la colinéarité et la coplanarité dans la résolution de problèmes.

Table des matières

1. Calcul vectoriel dans l'espace

1.1 Vecteurs dans l'espace

Définition

Définition 1.1 — Dans l'espace, à tout couple de points (A, B) on associe un **vecteur** $\overrightarrow{AB}$. Deux couples (A, B) et (C, D) représentent le *même* vecteur ssi $ABDC$ est un parallélogramme.

1.2 Opérations

Propriété

Propriété 1.1 — L'addition et la multiplication par un scalaire sont définies comme dans le plan :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (\text{Chasles}) \quad ; \quad \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}.$$

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- (a) **Commutativité** : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- (b) **Associativité** : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- (c) **Vecteur nul** : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
- (d) **Opposé** : $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.
- (e) **Distributivité** : $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ et $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$.
- (f) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$.

2. Colinéarité de deux vecteurs

Définition

Définition 2.1 — Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont **colinéaires** si l'un est multiple de l'autre :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad \vec{v} = \lambda \vec{u} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \lambda \vec{v}.$$

Remarque

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} = \lambda \vec{u}$.

Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

Propriété

Propriété 2.1 — Trois points A, B, C sont **alignés** ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** (ou confondues) ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

3. Coplanarité de trois vecteurs

3.1 Définition

Définition

Définition 3.1 — Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de l'espace sont **coplanaires** si leurs représentants partant d'un même point O sont *dans un même plan*.

Plus formellement : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires ssi il existe A, B, C, D coplanaires tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

3.2 Caractérisation vectorielle

Théorème

Théorème 3.1 — Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires ssi il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que :

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$

De manière équivalente, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : $\vec{w}$ s'écrit comme **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Propriété

Propriété 3.1 — Quatre points A, B, C, D sont **coplanaires** ssi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, ssi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ (sous condition que A, B, C ne soient pas alignés).

3.3 Bases et repères

Définition

Définition 3.2 — Trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *non coplanaires* forment une **base** de l'espace. Tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace s'écrit de manière *unique* sous la forme :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(x, y, z) sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Si l'on ajoute un point O (origine), $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un **repère** de l'espace. Tout point M a alors des coordonnées (x, y, z) telles que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

3.4 Coordonnées et colinéarité, coplanarité

Propriété

Propriété 3.2 — Dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** ssi les déterminants 2×2 extraits s'annulent : $xy' - yx' = xz' - zx' = yz' - zy' = 0$.

- Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **coplanaires** ssi le **déterminant** 3×3 associé s'annule :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

3.5 Coordonnées et calcul

Propriété

Propriété 3.3 — Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Le **milieu** I de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

Exemple

Exemple 3.1 — Dans un repère, soient $A(1, 2, 3)$, $B(4, -1, 0)$, $C(2, 5, 1)$.

$$\overrightarrow{AB} = (3, -3, -3), \overrightarrow{AC} = (1, 3, -2).$$

Coplanarité avec $\vec{w} = (5, -3, -8)$? Calculons :

$$\det = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & -8 \end{vmatrix}.$$

Développement selon la 1ère ligne :

$$\begin{aligned} & 3 \cdot (3 \cdot (-8) - (-3) \cdot (-2)) - 1 \cdot ((-3) \cdot (-8) - (-3) \cdot (-3)) + 5 \cdot ((-3)(-2) - 3 \cdot (-3)) \\ &= 3 \cdot (-24 - 6) - 1 \cdot (24 - 9) + 5 \cdot (6 + 9) = 3 \cdot (-30) - 15 + 75 = -90 - 15 + 75 = -30 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

4. Synthèse

4.1 Récapitulatif

Notion	Caractérisation
Colinéarité de $\vec{u}, \vec{v}$	$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} = \lambda \vec{u}$ (ou $\vec{u} = \vec{0}$)
A, B, C alignés	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires
Coplanarité de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$	$\exists \alpha, \beta, \gamma$ non tous nuls, $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$
A, B, C, D coplanaires	$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ coplanaires
Base de l'espace	3 vecteurs non coplanaires
Déterminant 3×3	test pratique de coplanarité

4.2 Pièges classiques

Remarque

1. **Confondre colinéarité (2 vecteurs) et coplanarité (3 vecteurs).**
2. **Coplanarité de 3 points.** Trois points sont toujours coplanaires (ils définissent un plan).
3. **Base de l'espace.** Trois vecteurs coplanaires ne forment pas une base.
4. **Combinaison linéaire à vérifier.** Le système $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{w}$ doit admettre une solution *compatible* sur les trois coordonnées.