

Table des matières

1	Intersection et parallélisme dans l'espace	2
1.1	Le plan	2
1.2	Positions relatives de deux droites	2
1.3	Positions relatives d'une droite et d'un plan	3
1.4	Positions relatives de deux plans	3
2	Orthogonalité dans l'espace	4
2.1	Droites orthogonales	4
2.2	Droite perpendiculaire à un plan	5
2.3	Plans perpendiculaires	5
3	Calcul des aires et des volumes	6

1 Intersection et parallélisme dans l'espace

1.1 Le plan

DÉFINITION

Un plan est un ensemble de points de l'espace. Trois points non alignés A , B et C déterminent un unique plan, noté (ABC) .

PROPRIÉTÉ 1

Un plan est déterminé de manière unique par l'une des données suivantes :

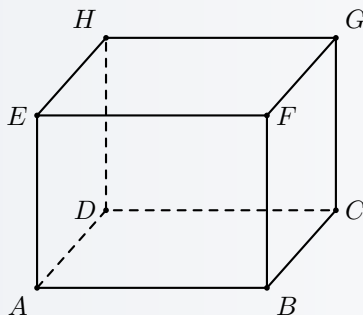
- trois points non alignés ;
- deux droites sécantes ;
- deux droites strictement parallèles ;
- une droite et un point qui ne lui appartient pas.

PROPRIÉTÉ

- Si deux points distincts d'une droite (d) appartiennent à un plan (P) , alors (d) est contenue dans (P) .
- Si deux plans distincts ont un point commun, leur intersection est une droite passant par ce point.
- Dans tout plan de l'espace, les propriétés de la géométrie plane restent valables.

EXEMPLE

Dans le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous, identifier le plan déterminé par A , B et C , puis déterminer l'intersection des plans $(ABCD)$ et $(BCGF)$.



1.2 Positions relatives de deux droites

DÉFINITION

Deux droites sont **coplanaires** lorsqu'elles appartiennent à un même plan. Sinon, elles sont dites **non coplanaires**.

PROPRIÉTÉ 2

Deux droites coplanaires sont dans une seule des situations suivantes :

- elles sont sécantes en un point unique ;
- elles sont strictement parallèles ;
- elles sont confondues.

Deux droites non coplanaires ne sont ni sécantes ni parallèles.

PROPRIÉTÉ

- Par un point donné passe une unique droite parallèle à une droite donnée.
- Si deux droites sont parallèles, tout plan qui coupe l'une coupe aussi l'autre.
- Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

REMARQUE

Deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas nécessairement parallèles. Il faut vérifier qu'elles sont coplanaires.

1.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

PROPRIÉTÉ 3

Une droite (d) et un plan (P) sont dans une seule des situations suivantes :

- (d) est contenue dans (P) ;
- (d) et (P) sont strictement parallèles, donc sans point commun ;
- (d) et (P) sont sécants en un point unique.

PROPRIÉTÉ

Une droite (d) est strictement parallèle à un plan (P) si elle n'est pas contenue dans (P) et si elle est parallèle à une droite de (P) .

PROPRIÉTÉ

Soit (d) une droite strictement parallèle à un plan (P) . Si un plan (Q) contient (d) et coupe (P) suivant une droite (Δ) , alors $(d) \parallel (\Delta)$.

EXEMPLE

Dans le cube $ABCDEFGH$, justifier que (AB) est strictement parallèle au plan $(EFGH)$, puis déterminer l'intersection de (BF) avec ce plan.

1.4 Positions relatives de deux plans

PROPRIÉTÉ 4

Deux plans sont dans une seule des situations suivantes :

- ils sont sécants suivant une droite ;
- ils sont strictement parallèles ;
- ils sont confondus.

THÉORÈME 1

Si un plan contient deux droites sécantes respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un autre plan, alors les deux plans sont parallèles. Ils sont strictement parallèles lorsqu'ils sont distincts.

PROPRIÉTÉ

Si deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan, alors leurs droites d'intersection avec ce troisième plan sont parallèles.

THÉORÈME

Théorème du toit. Soient deux plans sécants (P) et (Q) . Si (P) contient une droite (d) et (Q) contient une droite (d') telles que $(d) \parallel (d')$, alors la droite d'intersection de (P) et (Q) est parallèle à (d) et à (d') .

EXERCICE

On considère le cube $ABCDEFGH$ de la figure précédente.

- 1 Préciser la position relative de (AB) et (DC) .
- 2 Préciser la position relative de (AB) et (CG) .
- 3 Déterminer l'intersection des plans $(ABCD)$ et $(BCGF)$.
- 4 Montrer que les points A , B , G et H sont coplanaires.
- 5 Le plan (ACG) coupe les plans $(ABFE)$ et $(DCGH)$. Déterminer les deux droites d'intersection puis les comparer.

EXERCICE

Dans le cube $ABCDEFGH$, M est le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[BF]$.

- 1 Montrer que $(MN) \parallel (AF)$ puis que $(MN) \parallel (DG)$.
- 2 Préciser la position relative de (MN) et (EF) .
- 3 Montrer que (MN) et (FG) sont non coplanaires.
- 4 Donner un plan contenant la droite (MN) .

2 Orthogonalité dans l'espace

2.1 Droites orthogonales

DÉFINITION 1

Deux droites de l'espace sont **orthogonales** lorsque leurs parallèles menées par un même point sont perpendiculaires. Deux droites orthogonales qui se coupent sont dites **perpendiculaires**.

PROPRIÉTÉ

- Toute droite parallèle à l'une de deux droites orthogonales est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont respectivement parallèles à deux droites orthogonales, alors elles sont orthogonales.

EXEMPLE

Dans le cube $ABCDEFGH$, étudier la position des droites (DC) et (AE) . Préciser si elles sont orthogonales et si elles sont perpendiculaires.

2.2 Droite perpendiculaire à un plan

DÉFINITION

Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

THÉORÈME 2

Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

PROPRIÉTÉ

- Par un point donné passe une unique droite perpendiculaire à un plan donné.
- Par un point donné passe un unique plan perpendiculaire à une droite donnée.
- Deux droites perpendiculaires au même plan sont parallèles.
- Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

EXEMPLE

Dans le cube $ABCDEFGH$, montrer que (BF) est perpendiculaire au plan $(ABCD)$ en utilisant deux droites sécantes de ce plan.

REMARQUE

L'orthogonalité avec une seule droite d'un plan ne suffit pas pour conclure qu'une droite est perpendiculaire à ce plan.

2.3 Plans perpendiculaires

DÉFINITION

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'eux contient une droite perpendiculaire à l'autre.

PROPRIÉTÉ

- Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

EXEMPLE

Dans le cube $ABCDEFGH$, montrer que les plans $(ABFE)$ et $(ABCD)$ sont perpendiculaires.

EXERCICE

Dans un cube $ABCDEFGH$:

- 1 Montrer que $(AE) \perp (ABCD)$.
- 2 En déduire que les plans $(AEHD)$ et $(ABCD)$ sont perpendiculaires.
- 3 Montrer que $(AE) \perp (EFGH)$.
- 4 Préciser la position relative des plans $(ABFE)$ et $(DCGH)$.

EXERCICE

Soit (P) un plan et soient (d) et (d') deux droites parallèles. On suppose que $(d) \perp (P)$.

- 1 Montrer que $(d') \perp (P)$.
- 2 Si un plan (Q) est perpendiculaire à (d') , comparer (P) et (Q) .

3 Calcul des aires et des volumes

PROPRIÉTÉ 5

On note $\mathcal{B}$ l'aire d'une base, $P_{\mathcal{B}}$ son périmètre, h la hauteur, S_L l'aire latérale et S_T l'aire totale.

Solide	Aire latérale	Aire totale	Volume
Cube de côté a	$4a^2$	$6a^2$	a^3
Pavé droit de base $a \times b$ et de hauteur c	$2c(a + b)$	$2(ab + bc + ca)$	abc
Prisme droit	$P_{\mathcal{B}}h$	$P_{\mathcal{B}}h + 2\mathcal{B}$	$\mathcal{B}h$
Cylindre droit de rayon R	$2\pi Rh$	$2\pi R(R + h)$	πR^2h
Pyramide	somme des aires des faces latérales	$S_L + \mathcal{B}$	$\frac{1}{3}\mathcal{B}h$

REMARQUE

La base d'un prisme ou d'une pyramide est polygonale. La hauteur est la distance entre les deux bases pour un prisme droit, et la distance du sommet au plan de la base pour une pyramide.

EXEMPLE

Un cylindre droit a pour rayon $R = 3$ cm et pour hauteur $h = 5$ cm. Calculer son aire latérale, son aire totale et son volume.

EXERCICE

Un prisme droit a une base triangulaire de côtés 3 cm, 4 cm et 5 cm. La hauteur relative au côté de 4 cm mesure 3 cm. La hauteur du prisme mesure 8 cm.

- 1 Calculer l'aire et le périmètre de la base.
- 2 Calculer l'aire latérale et l'aire totale du prisme.
- 3 Calculer son volume.

EXERCICE

Une pyramide a une base carrée de côté 6 cm et une hauteur de 8 cm.

- 1 Calculer l'aire de la base puis le volume de la pyramide.
- 2 Toutes les longueurs sont multipliées par 2. Par quel nombre l'aire de la base et le volume sont ils multipliés ?

EXERCICE

Un réservoir cylindrique a un diamètre intérieur de 2 m et une hauteur de 3 m.

- 1 Calculer son volume exact en mètres cubes.
 - 2 Donner une valeur approchée au litre près.
 - 3 Combien de litres contient il lorsqu'il est rempli aux trois quarts ?
-

REMARQUE

Lorsque toutes les longueurs sont multipliées par un nombre positif k , les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3 .
