

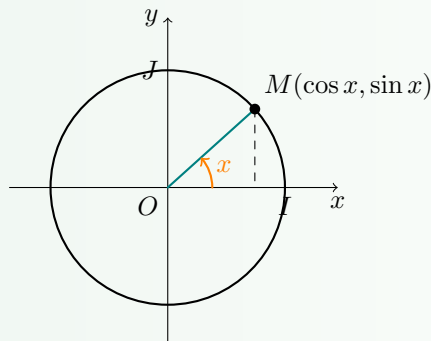
Table des matières

1	Cercle trigonométrique et abscisses curvilignes	2
2	Angles orientés	2
3	Lignes trigonométriques	3
4	Angles associés et équations fondamentales	4
5	Fonctions sinus et cosinus	5
6	Inéquations trigonométriques fondamentales	5
7	Angles inscrits et relations dans le triangle	6

1 Cercle trigonométrique et abscisses curvilignes

DÉFINITION 1

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le sens direct. À tout réel x , on associe l'unique point M obtenu en parcourant sur ce cercle une longueur algébrique égale à x à partir de I . Le réel x est une abscisse curviligne de M .



PROPRIÉTÉ

Deux réels x et y repèrent le même point du cercle si et seulement si

$$x - y = 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Tout point du cercle possède une unique abscisse curviligne principale dans $] -\pi, \pi]$.

PROPRIÉTÉ 1

Les unités d'angle sont reliées par

$$180^\circ = \pi \text{ rad} = 200 \text{ grades}.$$

Ainsi

$$\alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\text{deg}} \frac{\pi}{180}, \quad \alpha_{\text{grade}} = \alpha_{\text{deg}} \frac{10}{9}.$$

EXEMPLE

Déterminer l'abscisse principale du point repéré par $\frac{17\pi}{6}$. Convertir ensuite 150° en radians et en grades.

EXERCICE

Déterminer l'abscisse curviligne principale associée à $-\frac{25\pi}{6}$, puis convertir 135° en radians et en grades.

2 Angles orientés

DÉFINITION 2

Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi droites de même origine. L'angle orienté $(\widehat{[Ox), [Oy)})$ est défini modulo 2π . Sa mesure principale est l'unique mesure appartenant à $] -\pi, \pi]$.

PROPRIÉTÉ

Pour trois demi droites $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$, la relation de Chasles s'écrit

$$(\widehat{[Ox), [Oz)}) = (\widehat{[Ox), [Oy)}) + (\widehat{[Oy), [Oz)}) \pmod{2\pi}.$$

On a aussi

$$(\widehat{[Oy), [Ox)}) = -(\widehat{[Ox), [Oy)}) \pmod{2\pi}.$$

DÉFINITION

Pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, l'angle orienté $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ est l'angle de deux demi droites dirigées respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il vérifie la même relation de Chasles.

EXEMPLE

Si $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \frac{5\pi}{6}$ et $\widehat{(\vec{v}, \vec{w})} \equiv -\frac{2\pi}{3}$, déterminer $\widehat{(\vec{u}, \vec{w})}$ modulo 2π .

EXERCICE

On donne $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \frac{7\pi}{5}$ et $\widehat{(\vec{v}, \vec{w})} \equiv \frac{9\pi}{10}$. Déterminer la mesure principale de $\widehat{(\vec{u}, \vec{w})}$.

3 Lignes trigonométriques

DÉFINITION 3

Si le point M du cercle trigonométrique associé au réel x a pour coordonnées (a, b) , alors

$$\cos x = a, \quad \sin x = b.$$

Lorsque $\cos x \neq 0$, on définit

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Pour un angle orienté, ses lignes trigonométriques sont celles de l'une quelconque de ses mesures.

PROPRIÉTÉ

Pour tout réel x ,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Lorsque $\cos x \neq 0$,

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

PROPRIÉTÉ 2

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

EXEMPLE

Si $\cos x = -\frac{3}{5}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, calculer $\sin x$ et $\tan x$ en justifiant leurs signes.

4 Angles associés et équations fondamentales

PROPRIÉTÉ 3

Pour tout réel x ,

$$\begin{array}{ll}
 \cos(-x) = \cos x, & \sin(-x) = -\sin x, \\
 \cos(\pi - x) = -\cos x, & \sin(\pi - x) = \sin x, \\
 \cos(\pi + x) = -\cos x, & \sin(\pi + x) = -\sin x, \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.
 \end{array}$$

Lorsque les tangentes sont définies, on a aussi

$$\tan(-x) = -\tan x, \quad \tan(\pi - x) = -\tan x, \quad \tan(\pi + x) = \tan x.$$

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels x et a ,

$$\begin{array}{l}
 \cos x = \cos a \iff x = 2k\pi + a \text{ ou } x = 2k\pi - a, \\
 \sin x = \sin a \iff x = 2k\pi + a \text{ ou } x = (2k + 1)\pi - a, \\
 \tan x = \tan a \iff x = k\pi + a,
 \end{array}$$

où $k \in \mathbb{Z}$, la dernière relation étant écrite lorsque les tangentes sont définies.

EXEMPLE

Résoudre graphiquement dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$, puis vérifier les solutions sur le cercle trigonométrique.

EXERCICE

Résoudre dans $] -\pi, \pi]$ l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

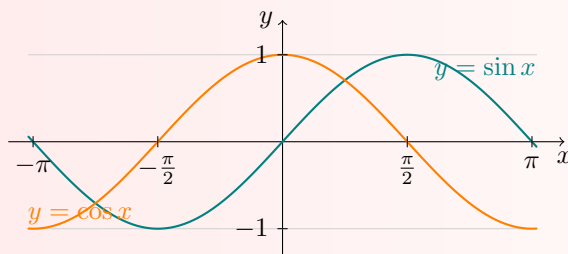
5 Fonctions sinus et cosinus

PROPRIÉTÉ 4

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont périodiques de période 2π . La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire :

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

Leurs valeurs appartiennent à $[-1, 1]$.



PROPRIÉTÉ

Sur $[0, \pi]$, la fonction cosinus est strictement décroissante de 1 à -1 . Sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, la fonction sinus est strictement croissante de -1 à 1. La périodicité et la parité permettent de construire les deux courbes sur tout $\mathbb{R}$.

REMARQUE

Une équation ou une inéquation trigonométrique peut être résolue graphiquement en lisant les intersections ou les positions relatives de la courbe et d'une droite horizontale.

6 Inéquations trigonométriques fondamentales

PROPRIÉTÉ 5

Pour résoudre une inéquation telle que $\sin x \geq a$, $\cos x \leq a$ ou $\tan x \geq a$, on commence par la résoudre sur une période à l'aide du cercle trigonométrique ou d'une courbe, puis on ajoute les périodes.

EXEMPLE

Résoudre graphiquement $\sin x \geq \frac{1}{2}$ d'abord sur $[0, 2\pi[$, puis dans $\mathbb{R}$ en utilisant la périodicité.

EXEMPLE

Résoudre graphiquement l'inéquation $\cos x < 0$ sur $] -\pi, \pi[$.

EXERCICE

Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

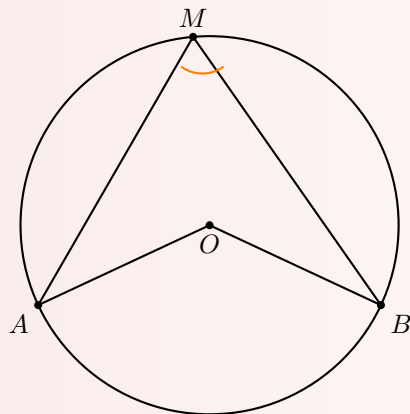
7 Angles inscrits et relations dans le triangle

THÉORÈME 1

Dans un cercle de centre O , un angle inscrit et un angle au centre interceptant le même arc vérifient

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}.$$

Deux angles inscrits interceptant le même arc ont donc la même mesure.



PROPRIÉTÉ

Un quadrilatère convexe est inscriptible dans un cercle si et seulement si ses angles opposés sont supplémentaires. Ainsi, pour un quadrilatère inscriptible $ABCD$,

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \pi, \quad \widehat{B} + \widehat{D} = \pi.$$

THÉORÈME 2

Dans un triangle ABC , on pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ et on note R le rayon du cercle circonscrit. Alors

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R.$$

C'est la loi des sinus.

PROPRIÉTÉ

L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC vérifie

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2}ca \sin \widehat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \widehat{C}.$$

Si p est le demi périmètre et r le rayon du cercle inscrit, alors

$$\mathcal{A} = pr.$$

EXEMPLE

Dans un triangle, le côté opposé à $\widehat{A} = 30^\circ$ mesure $a = 6$. Calculer le rayon du cercle circonscrit.

EXERCICE

Dans un triangle ABC , on donne $AB = 8$, $AC = 5$ et $\hat{A} = 60^\circ$. Calculer l'aire du triangle, puis son rayon inscrit sachant que $BC = 7$.

À retenir

PROPRIÉTÉ

Un angle orienté est défini modulo 2π et possède une mesure principale dans $] -\pi, \pi]$. Le cercle trigonométrique relie angles, coordonnées, équations et inéquations. Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π . Les angles inscrits, la loi des sinus et les formules d'aire prolongent la trigonométrie dans la géométrie du triangle.
