

Évaluation diagnostique

Première année du baccalauréat, Sciences mathématiques BIOF

Ens. Nidal SABI

Durée : 2 heures

Exercice 1

- 1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - x - 6 = 0$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - x - 6 < 0$.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations

$$\frac{-2x^2 + 5x - 3}{3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2} \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{x^2 - 9x + 8}{2x - 8} \geq 0.$$

- 3) Soit $x > 0$. Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$$

- 4) Soit n un entier naturel impair. Montrer que n^2 est impair.
- 5) Soit P un polynôme. Montrer que, pour $x \neq a$,

$$\frac{aP(x) - xP(a)}{x - a} = a \frac{P(x) - P(a)}{x - a} - P(a).$$

Exercice 2

Soient ABC un triangle et E, F, P les points tels que

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

- 1) Montrer que $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CB}$.
- 2) Construire une figure convenable.
- 3) Montrer que $\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{PF} = -2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$.
- 4) En déduire que les points E, F et P sont alignés.
- 5) Soit I le milieu de $[AB]$. Montrer que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires.

Exercice 3

- 1) Recopier les identités vraies :

— $\cos(-x) = -\cos x$;	— $\sin(\pi + x) = -\sin x$;
— $\cos(-x) = \cos x$;	— $\sin(\pi + x) = \sin x$;
— $\sin(-x) = -\sin x$;	— $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$;
— $\sin(-x) = \sin x$;	— $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$;
— $\cos(\pi + x) = -\cos x$;	— $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$;
— $\cos(\pi + x) = \cos x$;	— $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

- 2) Déterminer $\cos \frac{\pi}{6}$, $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\tan \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{2}$, $\sin \frac{\pi}{2}$ et $\tan \frac{\pi}{3}$.
- 3) Déterminer $\cos \frac{2\pi}{3}$, $\sin \frac{4\pi}{3}$, $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$, $\tan \frac{7\pi}{6}$ et $\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$.

Exercice 4

- 1) Soient $x, y, z > 0$.
 - a) Montrer que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
 - b) En déduire

$$x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 6 \quad \text{et} \quad (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9.$$

c) Montrer que $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$.

d) En déduire

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \leq \frac{x+y+z}{2}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer $\frac{2n-1}{2n}$ et $\frac{2n}{2n+1}$.

3) a) Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, montrer que $|a+b| \leq |a| + |b|$ et $|a| - |b| \leq |a-b|$.

b) Montrer que, si $a+b+c=0$, alors $a^3+b^3+c^3=3abc$.