

Évaluation diagnostique

Deuxième année du baccalauréat, Sciences mathématiques

Ens. Nidal SABI

Exercice 1

1) Écrire la définition de chacune des limites suivantes :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, & \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, & \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell, & \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, & \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.\end{aligned}$$

2) En utilisant la définition d'une limite, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer, en discutant selon la valeur de n , les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 2x^3}{x^3 + x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}}.$$

4) Résoudre dans $[-\pi; \pi[$ l'inéquation

$$\cos x + \sin x \leq 1.$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1) Étudier la dérivabilité de f en 0.

2) Déterminer $D_{f'}$, puis calculer $f'(x)$.

Exercice 3

I) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \equiv 0 \pmod{17}.$$

II) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a = 5n^2 + 7$ et $b = n^2 + 2$.

1) Montrer que, pour tout entier d ,

$$d \mid a \text{ et } d \mid b \implies d \mid 3.$$

2) Montrer que

$$\gcd(a, b) = 3 \implies \exists k \in \mathbb{N} : n^2 - 1 = 3k.$$

3) Déterminer l'ensemble

$$H = \{n \in \mathbb{N} \mid \gcd(a, b) = 3\}.$$

Exercice 4

On considère l'application

$$f :]5; +\infty[\longrightarrow]2; +\infty[, \quad x \mapsto \frac{2x-1}{x-5}.$$

1) Déterminer $f(]5; +\infty[)$.

2) Montrer que f est bijective, puis déterminer sa réciproque f^{-1} .

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la suite (U_n) définie par

$$U_0 = a, \quad U_{n+1} = \frac{nU_n + a}{n+1}.$$

Montrer, par deux méthodes différentes, que la suite (U_n) est constante.