MATH TUTOR LYCÉE

Version 15

Contrôles · 2ème Bac · Semestre 1

Matière : Mathématiques	**Niveau :** 2ème Bac SX BIOF	**Durée :** 2 heures
Semestre : 1	**Barème :** 20 points	**Calculatrice :** autorisée

Instructions : Les questions de l'exercice 1 sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient. L'usage de la calculatrice est autorisé.

EXERCICE N°1

Les questions sont indépendantes.

Question 1. *(2 pts)*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1. $\sqrt{4x-1}+\dfrac{12}{4(x-1)}+7=0$
2. $\sqrt[3]{(2-x)^2}+3\sqrt[3]{(x+2)^2}=2\sqrt[3]{4-x^2}$

Question 2. *(1,5 pt)*

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-4-\sin x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}\right)$

Question 3. *(1,5 pt)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - a}{x - 2}, & x < 2 \\ \dfrac{2x^2 + b - a}{x}, & x \geq 2 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue en 2.

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + 5}\right).$$

1. Déterminer D_f, puis calculer les limites aux bornes de D_f. *(1,5 pt)*

2. Étudier la continuité de f sur D_f. *(0,5 pt)*

3.

a) Montrer que l'équation $(x-2)(x+1)\,f(x) = 2x - 1$ admet au moins une solution α sur $]-1\,,\,2[$. *(1,5 pt)*

b) En déduire que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 2} + \dfrac{1}{\alpha + 1}$. *(0,5 pt)*

4.

a) Démontrer que *(1,5 pt)*

$$\left(\forall\, x \in D_f\right)\ ; \quad f'(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+5}\right)^2}{2\sqrt{x^2+5}}$$

b) Donner le tableau de variations de f sur D_f. *(0,5 pt)*

c) En déduire que $f(x)$ et x ont même signe sur D_f. *(0,75 pt)*

5. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution β dans D_f. *(0,5 pt)*

6. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. *(0,75 pt)*

7. Déterminer $f^{-1}\left([0\,,\,5]\right)$. *(1 pt)*

8. Exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x, pour tout $x \in J$. *(1,5 pt)*

9. Déterminer la valeur de β. *(0,5 pt)*

10. Dresser le tableau de variations de f^{-1}. *(0,5 pt)*

11. Simplifier

$$\frac{1}{2}\, f^{-1}(x)\left(f^{-1}(x) + \sqrt{\left(f^{-1}(x)\right)^2 + 5}\right)$$

pour tout $x \in J$. *(0,5 pt)*

12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f^{-1}(x) = f(x)$. *(1 pt)*

13. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que :

$$\sqrt{1+\frac{5}{a^2}} < \sqrt{1+\frac{5}{b^2}}.$$

(1 pt)

14. On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,x\left(x+\sqrt{x^2+5}\right), & x > \alpha \\ \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+1}, & x \leq \alpha \end{cases}$$

Montrer que g est continue en α. *(1 pt)*