

Devoir Maison N°1
Mathématiques
2^{ème} Bac SM — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI Semestre : 1	Niveau : 2 ^{ème} Bac SM Barème : 20 points	Durée : — Calculatrice : autorisée
---	--	---------------------------------------

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Limites, arctan et valeurs intermédiaires	5 pts
Exercice 2	Bijection et fonction réciproque	4 pts
Exercice 3	Étude de fonction et fonction réciproque	11 pts
Total		20 pts

Instructions : Les questions I, II et III de l'exercice 1 sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Limites, arctan et valeurs intermédiaires — 5 points

Les questions I, II et III sont indépendantes.

I. Calculer les limites suivantes : (2 pts)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x+1}} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \arctan(x) - \pi}{x - 1}$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{-x^3 + x^2 + 1} + x \right)$$

II. Démontrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$:

$$\frac{1}{2} \arctan x + \arctan \left(\sqrt{1+x^2} - x \right) = \frac{\pi}{4}$$

(1 pt)

III. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$ tel que $f(a) < 0$. Démontrer $\exists \alpha \in]a; b[\mid f(\alpha) = \frac{a - \alpha}{b - \alpha}$. (2 pts)

Exercice 2 : Bijection et fonction réciproque — 4 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = \arctan(3x) + 2x - 1$.

1. Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. (1 pt)

2. Démontrer que l'équation $f^{-1}(x) = x$ admet une solution α sur $\mathbb{R}$ et que $0 < \alpha < \frac{1}{3}$. (1 pt)

3. Vérifier que $\alpha = 1 - \arctan(3\alpha)$ et $1 - \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$. (0,5 pt)

4. Démontrer que $f^{-1}(x) < x$ $(\forall x \in]\alpha; +\infty[)$ et interpréter géométriquement ce résultat. (1,5 pt)

Exercice 3 : Étude de fonction et fonction réciproque — 11 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x}, & x \leq 1 \\ (x-1) \left(1 + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right), & x > 1 \end{cases}$$

1.

- a) Montrer que la fonction f est continue en 1. (0,75 pt)
- b) Étudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter géométriquement ce résultat. (0,75 pt)

2.

- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (1 pt)
- b) Démontrer que la droite d'équation $(\Delta) : y = x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$. (0,25 pt)
- c) Étudier la branche infinie à (C_f) au voisinage de $-\infty$. (1 pt)

3.

- a) Étudier les variations de f sur $I =]-\infty; 1[$. (1,5 pt)
- b) Donner le tableau de variations de f' sur l'intervalle $K = [1; +\infty[$ puis les variations de f sur K . (1,5 pt)

4. Soit g la restriction de f sur $J =]-\infty; 0]$.

- a) Démontrer que g est une bijection de J vers un intervalle L à déterminer. (0,75 pt)
- b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t^3 - 3t - 2 = 0$ puis déterminer $g^{-1}(-2)$ et $(g^{-1})'(-2)$. (1,25 pt)
- c) Construire dans un repère orthonormé les courbes (C_f) et $(C_{g^{-1}})$. (2 pts)