

Devoir Maison N°1

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI
Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SM
Barème : 20 points

Durée : —
Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites adjacentes et équation polynomiale	8 pts
Exercice 2	Continuité et valeurs intermédiaires	12 pts
Total		20 pts

Instructions : Les questions I et II de l'exercice 1 sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Suites adjacentes et équation polynomiale — 8 points

Les questions I et II sont indépendantes.

I. Soit θ un élément de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et déterminer la limite commune l . (2,5 pts)

II. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - 1$.

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $\mathbb{R}^+$ puis déterminer α_1 et α_2 . (1,5 pt)

2.

a) Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x > 0$, comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$. (0,25 pt)

b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$ puis déduire que (α_n) est une suite décroissante. (0,5 pt)

c) Démontrer que $\forall n \geq 1 : 0 < \alpha_n \leq \frac{3}{4}$ puis calculer $\lim(\alpha_n)^{n+1}$. (0,5 pt)

3. Démontrer que $\forall x \neq 1 :$

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$$

puis déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* : (\alpha_n)^{n+1} = 2\alpha_n - 1$. (0,75 pt)

4. Démontrer que la suite (α_n) est convergente et calculer sa limite. (0,5 pt)

5. Pour tout $n \geq 1$ on pose $u_n = \alpha_n - \frac{1}{2}$.

a) Démontrer que $\forall n \geq 2 : 0 < u_n \leq \frac{1}{4}$. (0,5 pt)

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : (1 + 2u_n)^{n+1} = 2^{n+2}u_n$. (0,5 pt)

c) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$ puis calculer $\lim u_n$. (0,5 pt)

Exercice 2 : Continuité et valeurs intermédiaires — 12 points

I. Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt{2x-x^2} \right)$$

1. Déterminer D_h et démontrer que h est continue sur D_h .

(2,5 pts)

2. Démontrer qu'il existe $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right] ; 2\alpha < \sqrt{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt{2x-x^2} \leq \beta x.$$

(1,5 pt)

3. Soit $[a; b] \subset [0; 1]$, démontrer que :

$$\exists c \in [a; b] \quad h(c) = \frac{a-c}{a-2b+c}.$$

(1,5 pt)

II. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$ et x_1, x_2 et x_3 des réels de $[a; b]$. Montrer que l'équation $3f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ admet au moins une solution sur $[a; b]$.

(2,5 pts)

III. Soit φ une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) \neq 0$ pour tout x de I . Montrer que : $(\forall x \in I : \varphi(x) > 0)$ ou $(\forall x \in I : \varphi(x) < 0)$.

(2,5 pts)

IV. Soit ψ la fonction définie par $\psi(x) = \frac{2x^{2021} - 17x + 15}{x-1}$. Montrer que ψ est prolongeable par continuité en 1.

(1,5 pt)