

Devoir Maison N°1 (sujet 3)

Mathématiques

2^{ème} Bac SX BIOF — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SX BIOF

Barème : 20 points

Durée : —

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Calcul, limites, continuité et dérivation	—
Exercice 2	Étude de fonction et fonction réciproque	—
Total		20 pts

Instructions : Les questions I, II, III, IV, V et VI de l'exercice 1 sont indépendantes. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : Calcul, limites, continuité et dérivation

Les questions I, II, III, IV, V et VI sont indépendantes.

I. Soient x et y deux nombres strictement positifs. Démontrer que :

$$\left(\frac{x^5}{y^{-5}}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{x^{-8}}{y^3}\right)^{\frac{1}{12}} = xy$$

II. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = 2\sqrt[3]{4-x^2}$$

III. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-3x+1}{\sin x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x-4}-2}$$

IV. On considère la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x^3+x}{x-1}$$

1) Vérifier que $f(x) = -x + \frac{1}{x-1}$.

2) Démontrer que l'équation $x = \frac{1}{x-1}$ admet une seule solution α sur $[1; 2[$.

3) Démontrer que $\alpha^2(\alpha-2) = 1-\alpha$.

V. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\tan(x)}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en 0.

VI. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \cos\left(\sqrt{x^4+5x^2+1}\right) \quad ; \quad g(x) = (-x^2+4x)^{2025}$$

Exercice 2 : Étude de fonction et fonction réciproque

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x$$

1.
 - a) Déterminer le domaine de définition de f .
 - b) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.
2. Étudier la dérivabilité de f en -2 et en 2 ; interpréter géométriquement les résultats obtenus.
3. Déterminer le tableau de variations de f .
4. Soit g la restriction de f sur $[2; +\infty[$.
 - a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
5. Calculer $g^{-1}(-1)$ et $(g^{-1})'(-1)$.
6. Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$.