

Devoir Maison N°2 (2019)

Mathématiques

2^{ème} Bac SX BIOF — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SX BIOF

Barème : 20 points (+2 bonus)

Durée : —

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Étude de fonction et fonction réciproque	10 pts
Exercice 2	Suites numériques	10 pts
Exercice 3 (facultatif, bonus)	Limites de suites	2 pts
Total		20 pts (+2 bonus)

Instructions : L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : Étude de fonction et fonction réciproque — 10 points

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f . (0,5 pt)

2. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, et interpréter les résultats géométriquement. (1,5 pt)

3. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat géométriquement. (1 pt)

4.

a) Démontrer que $(\forall x \in]0; +\infty[), f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{(x+1)^3}}$. (1 pt)

b) Donner le tableau de variations de f . (0,75 pt)

5.

a) Démontrer que $(\forall x \in [0; +\infty[), f(x) - x = \frac{x(1-x)}{\sqrt{x+1}}$. (0,75 pt)

b) Déduire la position relative de (C_f) et la droite $(D) : y = x$. (1 pt)

6. Construire (C_f) . (1,5 pt)

7.

a) Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. (0,75 pt)

b) Construire $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (1,25 pt)

Exercice 2 : Suites numériques — 10 points

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}. \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$. (1 pt)

2. Étudier la monotonie de (u_n) puis déduire qu'elle est convergente. (1,5 pt)

3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. (1,5 pt)

b) Exprimer V_n puis u_n en fonction de n . (1,5 pt)

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (1 pt)

4.

a) Calculer $\sum_{k=0}^n V_k$. (1,5 pt)

b) Vérifier que $\frac{3}{u_n + 1} = 1 - V_n$. (0,5 pt)

5.

a) On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{3}{u_k + 1}$ et déduire que

$$\sum_{k=0}^n S_k = n + 1 + \frac{4}{3} \left[\left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} - 1 \right].$$

(1,5 pt)

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n S_k$. (0,5 pt)

Exercice 3 : Exercice facultatif (bonus) — 2 points

Soit (w_n) et (t_n) les suites définies par

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}, \quad t_n = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}_{n \text{ fois}}.$$

Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 2$.