

Devoir Surveillé N°1

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI
Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SM
Barème : 20 points

Durée : 2 heures
Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Limites, arctan et continuité	7 pts
Exercice 2	Bijection et fonction réciproque	3 pts
Exercice 3	Étude de fonction et analyse	10 pts
Total		20 pts

Instructions : Les questions de l'exercice 1 sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Limites, arctan et continuité — 7 points

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 2} - x \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \arctan \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} \right) \quad (2 \text{ pts})$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : \arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad (E_2) : 2x\sqrt{x} - 3x\sqrt[4]{\frac{1}{x}} = 20 \quad (1,5 \text{ pt})$$

3. Démontrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) :$

$$\frac{1}{2} \arctan x + \arctan \left(\sqrt{1+x^2} - x \right) = \frac{\pi}{4} \quad (1 \text{ pt})$$

4. Démontrer que $(\forall t \in \mathbb{R}^+) :$

$$0 \leq t - \arctan t \leq \frac{1}{3}t^3$$

puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - x \arctan \frac{1}{x} \right)$. (1,5 pt)

5. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0; 1]$ telles que $(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) \leq 0$. Démontrer que $\exists c \in [0; 1] ; f(c) = g(c)$. (1 pt)

Exercice 2 : Bijection et fonction réciproque — 3 points

Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ par $f(x) = \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x$.

1. Démontrer que f est une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ vers un intervalle J à déterminer. (1,5 pt)
2. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J . (1,5 pt)

Exercice 3 : Étude de fonction et analyse — 10 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan(x), & x \geq 0 \\ x - \sqrt[3]{x^2 - x}, & x \leq 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1.
 - a) Démontrer que f est continue en $x_0 = 0$. (0,5 pt)
 - b) Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0. (1 pt)
 - c) Étudier les branches infinies à (C_f) . (2 pts)
2. Étudier les variations de f . (2 pts)
3.
 - a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = x \arctan x - 1$. Étudier les variations de g . (0,5 pt)
 - b) Dédire qu'il existe un unique réel α sur $\mathbb{R}^+$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ et que $1 < \alpha < \sqrt{3}$. (1,5 pt)
 - c) Étudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$ sur $\mathbb{R}^+$. (0,5 pt)
4. Construire (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (1,5 pt)
5.
 - a) Démontrer que la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. (1 pt)
 - b) Démontrer qu'il existe un unique réel a sur $]0; \alpha[$ tel que $f'(a) = \frac{1}{2}$. (1 pt)
 - c) Dédire que $\forall x \in]0; a[: 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$. (0,5 pt)