

Devoir Surveillé N°1

Mathématiques

2^{ème} Bac SX BIOF — Semestre 1 — 2023

Enseignant : Nidal SABI
Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SX BIOF
Barème : 20 points

Durée : 2 heures
Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Calcul, limites et continuité	7 pts
Exercice 2	Variations et continuité	4 pts
Exercice 3	Fonction racine et fonction réciproque	9 pts
Total		20 pts

Instructions : Les questions de l'exercice 1 sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : Calcul, limites et continuité — 7 points

Les questions sont indépendantes.

1. Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt{y^5}} \times \frac{\sqrt[12]{x^{-8}}}{\sqrt[3]{y}} = xy$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations :

$$\sqrt{3+x} + \sqrt[3]{(3-x)^2} = 2\sqrt[3]{9-x^2} \quad ; \quad \sqrt[3]{6-7x} \leq 3$$

3. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^4 + 4x^2 - 1} - x}{1 - x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - \sqrt{x+1}}{x-3} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt[3]{x-4}}{4-x}$$

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{8-2x} - 2}{\tan(3x)}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 0.

Exercice 2 : Variations et continuité — 4 points

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^5 - 2x^3 + 27$.

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$, puis vérifier que $0 < \alpha < 2$.

3. Donner le signe de $g(x)$.

4. Vérifier que $\frac{3}{\alpha} = \sqrt[3]{\alpha^2 + 2}$.

5. Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3}{x}, & x < \alpha \\ \sqrt[3]{x^2 + 2}, & x \geq \alpha \end{cases}$$

Montrer que h est continue en α .

Exercice 3 : Fonction racine et fonction réciproque — 9 points

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$.

1. Déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f .

2. Démontrer que f est continue sur D_f .

3.

a) Démontrer que $(\forall x \in D_f \setminus \{-2; 1\}) ; f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}$.

b) Donner le tableau de variations de f sur D_f .

4. Soit g la restriction de f sur $]1; +\infty[$.

a) Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Donner le tableau de variations de g^{-1} .

c) Résoudre dans $]1; +\infty[$ l'équation $g^{-1}(x) = g(x)$.

d) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout x de J .

e) Calculer $\sqrt{(g(x)-1)^2 - g(x) - 2}$.

f) Soient a et b deux réels de $]1; +\infty[$ tels que $a < b$. Montrer que :

$$\frac{a+1}{b+1} < \frac{b}{a}$$