

Devoir Surveillé N°1

Mathématiques

2^{ème} Bac SX BIOF — Semestre 1 — 2023

Enseignant : Nidal SABI
Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SX BIOF
Barème : 20 points

Durée : 2 heures
Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Équations, limites et continuité	5 pts
Exercice 2	Étude de fonction et fonction réciproque	15 pts
Total		20 pts

Instructions : Les questions de l'exercice 1 sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : Équations, limites et continuité — 5 points

Les questions sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\sqrt{4x-1} + \frac{12}{\sqrt{4(x-1)}} + 7 = 0$

b) $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(x+2)^2} = 2\sqrt[3]{4-x^2}$

(2 pts)

2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 4 - \sin x}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x})$$

(1,5 pt)

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - a}{x - 2}, & x < 2 \\ \frac{2x^2 + b - a}{x}, & x \geq 2 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue en 2.

(1,5 pt)

Exercice 2 : Étude de fonction et fonction réciproque — 15 points

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2} (x + \sqrt{x^2 + 5})$$

1. Déterminer D_f puis calculer les limites aux bornes de D_f .

(1,5 pt)

2. Étudier la continuité de f sur D_f .

(0,5 pt)

3.

a) Montrer que l'équation $(x-2)(x+1)f(x) = 2x-1$ admet au moins une solution α sur $] -1 ; 2[$. (1,5

pt)

- b) En déduire que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 2} + \frac{1}{\alpha + 1}$. (0,5 pt)

4.

- a) Démontrer que $(\forall x \in D_f) ; f'(x) = \frac{(x + \sqrt{5 + x^2})^2}{2\sqrt{x^2 + 5}}$. (1,5 pt)

- b) Donner le tableau de variations de f sur D_f . (0,5 pt)

- c) En déduire que $f(x)$ et x ont même signe sur D_f . (0,75 pt)

5. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution β dans D_f . (0,5 pt)

6. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J à déterminer. (0,75 pt)

7. Déterminer $f^{-1}([0; 5])$. (1 pt)

8. Exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x , pour tout $x \in J$. (1,5 pt)

9. Déterminer la valeur de β . (0,5 pt)

10. Dresser le tableau de variations de f^{-1} . (0,5 pt)

11. Simplifier $\frac{1}{2} f^{-1}(f^{-1}(x) + (f^{-1}(x))^2 + 5)$, $\forall x \in J$. (0,5 pt)

12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f^{-1}(x) = f(x)$. (1 pt)

13. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que :

$$1 + \frac{5}{1 + \frac{5}{a^2}} < b$$

(1 pt)

14. On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x (x + \sqrt{5 + x^2}), & x > \alpha \\ \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 1}, & x \leq \alpha \end{cases}$$

- Montrer que g est continue en α . (1 pt)