

Devoir Surveillé N°1

Mathématiques

2^{ème} Bac SM — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI
Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SM
Barème : 20 points

Durée : 2 heures
Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Limites, arctan et continuité	12 pts
Exercice 2	Bijection et fonction réciproque	3 pts
Exercice 3	Suites et limites	5 pts
Total		20 pts

Instructions : Les questions de l'exercice 1 sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Limites, arctan et continuité — 12 points

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2023} - 2023x + 2022}{x - 1} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x+1}} \quad (1,5 \text{ pt})$$

2. Soient a un réel et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n(ax)}{x^2} = \frac{na^2}{2}$ et déduire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^{20}(2x) \cos^{21}(3x) \cos^{22}(4x)}{x^2}. \quad (1,5 \text{ pt})$$

3. Soit $x > 0$. Montrer que $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}x$. (2 pts)

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : \arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad (E_2) : \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12x-12} \quad (2 \text{ pts})$$

5. Démontrer que ($\forall x \in \mathbb{R}$) :

$$\frac{1}{2} \arctan x + \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{\pi}{4} \quad (1 \text{ pt})$$

6. Démontrer que ($\forall a, b \in]-1; 1[$) :

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

et déduire la valeur de $\sum_{p=1}^n \arctan\left(\frac{1}{2p^2}\right)$ et $\sum_{p=1}^n \arctan\left(\frac{1}{p^2 + 3p + 3}\right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. (3 pts)

7. f et g deux fonctions continues sur $[0; 1]$ telles que : $g(0) = f(1) = 1$ et $f(0) = g(1) = 0$. Démontrer que : $\exists c \in]0; 1[; f(c) = 2023 g(c)$. (1 pt)

Exercice 2 : Bijection et fonction réciproque — 3 points

Soit f la fonction définie sur $\left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]$ par $f(x) = \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x$.

1. Démontrer que f est une bijection de $\left[2\pi; \frac{7\pi}{3}\right]$ vers un intervalle J à déterminer. (1,5 pt)

2. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J . (1,5 pt)

Exercice 3 : Suites et limites — 5 points

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\ldots\sqrt{2}}}}_{n \text{ fois}}$$

(2 pts)

2. Soit θ un élément de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

a) Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et calculer $\lim(u_n - v_n)$. (2 pts)

b) Démontrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et déterminer la limite commune l . (1 pt)