

Devoir Surveillé N°1

Mathématiques

2^{ème} Bac SX BIOF — Semestre 1

Enseignant : Nidal SABI

Semestre : 1

Niveau : 2^{ème} Bac SX BIOF

Barème : 20 points

Durée : 2 heures

Calculatrice : autorisée

Composantes du sujet

N°	Domaine	Barème
Exercice 1	Calcul, dérivation, limites et continuité	8 pts
Exercice 2	Étude de fonction et fonction réciproque	12 pts
Total		20 pts

Instructions : Les questions de l'exercice 1 sont indépendantes. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre qui lui convient.

Exercice 1 : Calcul et fonctions — 8 points

Les questions sont indépendantes.

Question 1. Simplifier le nombre suivant :

$$A = \frac{\sqrt{9} \times \sqrt[4]{3} \times (\sqrt[3]{3})^2}{\sqrt[3]{\sqrt{3^5}}}$$

Question 2. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x} \quad ; \quad g(x) = \sin(x^2 + 4x)$$

Question 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sqrt[3]{(x-8)^2} - 3\sqrt[3]{x-8} = 0$$

Question 4. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{8x^3 + 1} - 4x \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+25} - 3}{x-3} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x-2}$$

Question 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 0.

Exercice 2 : Étude de fonction et fonction réciproque — 12 points

On considère la fonction f définie sur $I = [3; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 4 + \sqrt{x - 3}$$

Première partie : Dérivabilité

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

2.

- Montrer que pour tout x_1 et x_2 de I on a : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- En déduire la monotonie de f sur I puis dresser son tableau de variations.

3.

- Vérifier que :

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x - 3}}$$

- Étudier la dérivabilité de f à droite en 3, puis interpréter graphiquement le résultat.

4. Montrer que pour tout x de $[3; +\infty[$ on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x - 3}}$$

5. Donner l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 4$.

Deuxième partie : T.V.I

6. Montrer que la fonction f est continue sur I .

7. Montrer que : $\exists ! \alpha \in]3; 4[$, $f(\alpha) = 0$.

8. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur I .

9. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,5.

Troisième partie : Fonction réciproque

10. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

11. Comparer $f^{-1}(2025)$ et $f^{-1}(2026)$.

12. Calculer $f(4)$, puis montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et déterminer $(f^{-1})'(1)$.

13.

- Vérifier que : $(\forall x \in I)$, $f(x) = \left(\sqrt{x - 3} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.
- Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.